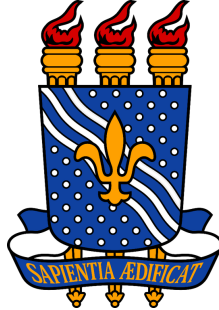


UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA



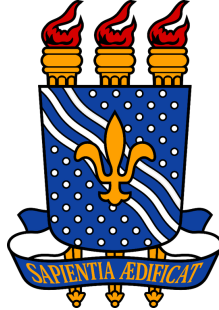
Ferdinande da Conceição Sousa

## Equivalência Local de Espaços-tempos em (2+1) Dimensões

DISSERTAÇÃO

João Pessoa – PB  
Novembro de 2007

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA



Ferdinande da Conceição Sousa

## Equivalência Local de Espaços-tempos em (2+1) Dimensões

Dissertação de mestrado apresentada à Co-ordenação do Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba(UFPB) como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Joel Batista da Fonseca Neto

João Pessoa – PB  
Novembro de 2007

Ferdinande da Conceição Sousa

## Equivalência Local de Espaços-tempos em (2+1) Dimensões

Dissertação de mestrado apresentada à Coordenação do Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba(UFPB) como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Jõa Pessoa – PB, 23 de novembro de 2007

### BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Joel Batista da Fonseca Neto  
Universidade Federal da Paraíba – UFPB

---

Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho  
Universidade Federal da Paraíba – UFPB

---

Prof. Dr. Marcelo José Rebouças  
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas – CBPF

---

Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra  
Universidade Federal da Paraíba – UFPB

# DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a Deus; A toda minha família; a Lécia minha amiga e companheira, que com sua força e compreensão tanto na fase inicial em que estivemos distante quanto na fase final, na qual ela esteve ao meu lado, foi peça fundamental neste trabalho; aos meus amigos, tanto os de João Pessoa quanto os de Teresina.

# EPÍGRAFE

*”Duas coisas são infinitas: o universo e a estupidez humana. Mas, em relação ao universo, ainda não tenho certeza absoluta”*

(Albert Einstein)

# AGRADECIMENTOS

Primeiro a Deus, causa e efeito da minha existência e perseverança.

A minha família pelas lições de vida, as quais nem sempre pude entender e até interpretei errado, amo vocês! Mesmo não sabendo como demonstrar isso, sempre os levarei onde quer que eu vá.

Ao meu orientador pela orientação, amizade e grande compreensão na minha fase inicial de adaptação a um novo mundo e por sua contribuição para minha formação como pesquisador em Física. Obrigado mestre!

Aos meus amigos de Teresina (a turma), os quais sempre estão comigo. Aos meus amigos do DF-UFPB onde fiz amizade com todos, aos quais sou grato por grande ajuda concedida nos estudos (muito Obrigado meus amigos!).

Aos professores das disciplinas que cursei na pós-graduação da UFPB: Eugênio (Mecânica Quântica), Valdir (Eletromagnetismo), Carlos Romero (Cosmologia Matemática e Relatividade Geral), Alexandre Rosas (Mecânica Estatística) e Fernando Moraes (Física do Estado Sólido).

E a todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para o ser humano e profissional que pretendo me tornar mas que não foram citados explicitamente.

A CAPES pelo auxílio financeiro durante a execução do trabalho.

# RESUMO

Neste trabalho o problema da equivalência de campos gravitacionais, no contexto das teorias da gravitação onde o espaço-tempo é uma variedade pseudo-Riemanniana com dimensão  $(2+1)D$ , isto é, a questão de decidir quando duas soluções exatas das equações de campo representam o mesmo campo gravitacional em sistemas de coordenadas diferentes, é abordado nos seus aspectos teóricos e práticos. A solução do problema é apresentada utilizando uma descrição do campo gravitacional que é invariante sob transformações de coordenadas. Expressões explícitas para as dimensões do grupo de isometria de um espaço-tempo com  $(2+1)D$  e do seu subgrupo de isotropia são dadas. Um conjunto mínimo de quantidades invariantes que descrevem o campo gravitacional local é explicitamente obtido, utilizando o formalismo dos espinores reais com dois componentes. Um algoritmo para testar a equivalência na prática é desenvolvido, como um caso particular do algoritmo de Karlhede para espaços-tempos em  $(3+1)D$ , e as classificações de Segre do tensor de Ricci e do tensor de Cotton-York são determinadas. O algoritmo está implementado, até a derivada covariante da curvatura de primeira ordem, utilizando o pacote de computação algébrica *GRtensorII* do sistema de computação algébrica *Maple*, onde os cálculos são realizados de maneira interativa. Utilizando as técnicas do problema da equivalência para espaços-tempos com  $(2+1)D$ , as condições para a homogeneidade espaço-temporal de variedades espaços-tempos com  $(2+1)D$  e métrica tipo-Gödel são derivadas e comparadas com trabalhos anteriores sobre espaços-tempos com  $(3+1)D$  e métrica tipo-Gödel. A equivalência destes espaços-tempos é estudada e mostra-se que eles admitem um grupo de isometria com dimensão 4 e também que são caracterizados por dois parâmetros essenciais.

# ABSTRACT

In this work the problem of equivalence of gravitational fields in the framework of theories of gravitation where the space-time is a pseudo-Riemannian manifold with dimension  $(2+1)D$ , that is, the question of deciding when two exact solutions apparently different represent the same gravitational field in different coordinate systems, is tackled in its theoretical and practical aspects. The solution of the problem is presented by using a coordinate-invariant description of the gravitational field. Explicit expressions for the dimensions of the group of symmetry of a  $(2+1)D$  spacetime and its subgroup of isotropy are given. A minimal set of invariant quantities which describe the local gravitational field is determined, by using the formalism of two-component real spinors. An algorithm for testing the equivalence in practice is developed as an adaptation the algorithm of Karlhede for  $(3+1)D$  spacetimes, and the Segre classifications of the Ricci and Cotton-York tensors are determined. The algorithm is implemented up to first order covariant derivative of the curvature, by using the computer algebra package GRtensorII of the system Maple, where all calculations are done interactively. Using the equivalence problem techniques for  $(2+1)D$  spacetimes, the conditions for space-time homogeneity of  $(2+1)D$  spacetimes with Gödel-type metrics are derived and compared with previous works on  $(3+1)D$  Gödel-type space-times. The equivalence of  $(2+1)D$  Gödel-type space-times is studied and it is shown that they admit a four-dimensional group of isometries and are characterized by two essential parameters.

---

# LISTA DE FIGURAS

2.1	Difeomorfismo entre os sistemas de coordenadas . . . . .	5
2.2	Equivalência das bases não-holonômicas . . . . .	6
2.3	Fibrado dos referenciais ortogonais generalizados. . . . .	8

---

## LISTA DE TABELAS

3.1	Tipos de Segre e formas canônicas para o tensor de Ricci . . . . .	20
3.2	Tipos de Segre e formas canônicas para o tensor de Ricci sem traço . . . . .	21
3.3	Formas canônicas dos tipos de Segre do espinor de Ricci . . . . .	23
3.4	Formas canônicas de Jordan para um tensor simétrico em um espaço-tempo com métrica de Lorentz e $(2+1)$ . . . . .	25
3.5	Formas canônicas de Jordan para um tensor simétrico de segunda ordem de traço nulo . . . . .	26

---

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>O PROBLEMA DA EQUIVALÊNCIA</b>	<b>4</b>
2.1	O Teorema da Equivalência . . . . .	4
2.2	Invariantes de Cartan e o Grupo de Isometria . . . . .	10
<b>3</b>	<b>EQUIVALÊNCIA NA PRÁTICA EM (2+1)D</b>	<b>13</b>
3.1	Classificação de Karlhede . . . . .	13
3.2	Tríadas Nulas e Transformações de Lorentz . . . . .	16
3.3	Classificação de Segre . . . . .	18
<b>4</b>	<b>UM CONJUNTO MÍNIMO DE INVARIANTES EM (2+1)D</b>	<b>27</b>
4.1	Quantidades Independentes . . . . .	28
4.2	Conjunto Mínimo . . . . .	29
<b>5</b>	<b>CÁLCULOS EM COMPUTAÇÃO ALGÉBRICA</b>	<b>33</b>
5.1	Conjunto Mínimo . . . . .	34
5.2	Classificação de Karlhede . . . . .	39
<b>6</b>	<b>ESPAÇOS-TEMPOS HOMOGENEOS TIPO-GÖDEL EM (2+1)D</b>	<b>42</b>
6.1	Espaços-tempos tipo-Gödel Homogêneos em (3+1)D . . . . .	42
6.2	Espaços-tempos tipo-Gödel Homogêneos em (2+1)D . . . . .	44
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>49</b>

---

<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>51</b>
<b>A ESPINORES EM (2+1)D</b>	<b>55</b>
A.1 Espinores Reais em (2+1)D . . . . .	55
A.2 Derivada Covariante . . . . .	58
A.3 Espinor de Curvatura . . . . .	59
A.4 Espinores de Ricci e de Cotton-York . . . . .	63
A.5 Identidades de Ricci e de Bianchi . . . . .	66

---

---

# CAPÍTULO 1

---

## INTRODUÇÃO

O problema da equivalência de campos gravitacionais, consiste na questão de decidir quando duas soluções exatas das equações de campo aparentemente diferentes, representam o mesmo campo gravitacional em sistemas de coordenadas diferentes. Nas teorias onde o espaço-tempo é dado por uma variedade pseudo-Riemanniana, o problema consiste em determinar se dois espaços-tempos são localmente isométricos ou não. Neste trabalho, é investigado o problema da equivalência em espaços-tempos pseudo-Riemannianos com dimensão 3, isto é, em  $(2+1)D$ , nos seus aspectos teóricos e práticos [1]. O objetivo é desenvolver as técnicas do problema da equivalência para  $(2+1)D$  em analogia com os resultados existentes para  $(3+1)D$ , implementados no sistema de computação algébrica *SHEEP/CLASSI* [2, 3, 4], de modo a contribuir com a investigação das teorias da gravitação em  $(2+1)D$ .

No capítulo 2, a primeira seção aborda o teorema da equivalência de Cartan [5, 6], que determina um conjunto de invariantes sob transformações de coordenadas, dado pelos componentes do tensor de curvatura e das suas derivadas covariantes até uma dada ordem em relação a um referencial não-holonômico. Esse conjunto constitui uma descrição completa do campo gravitacional local, válida para espaços-tempos pseudo-Riemannianos com qualquer dimensão. Na segunda seção, obtém-se a partir do conjunto de invariantes de Cartan, as dimensões do grupo de isometria, do subgrupo de isotropia e da órbita do grupo.

No capítulo 3 é mostrado como as dificuldades de utilizar a solução de Cartan na prática são consideravelmente reduzidas, através do desenvolvimento de um procedimento prático para testar a equivalência de espaços-tempos em  $(2+1)D$ , que é um caso particular do procedimento desenvolvido por Karlhede [7, 8] para espaços-tempos em  $(3+1)D$ . Na primeira seção, é apresentada a classificação Karlhede adaptada para espaços-tempos

em (2+1)D. Na segunda seção, são dadas as transformações de Lorentz em (2+1)D em relação a uma tríada nula, utilizadas na classificação de Karlhede. Na última seção, é discutida a classificação algébrica de um tensor simétrico de segunda ordem em (2+1)D, onde são obtidas as classificações do tensor de Ricci e do tensor de Cotton-York. O tensor de Cotton-York é o análogo em (2+1)D do tensor conforme de Weyl em (3+1)D que é identicamente nulo em (2+1)D. Estes resultados também são utilizados na classificação de Karlhede em (2+1)D.

No capítulo 4, demonstramos um teorema [1] onde obtemos explicitamente um conjunto completo mínimo para os invariantes de Cartan em (2+1)D, utilizando o formalismo de espinores reais com 2 componentes. Este conjunto é formado por derivadas de ordem  $n$  do espinor de curvatura tal que todas as derivadas de ordem  $m$  podem ser expressas algebricamente em termos desse conjunto para  $n \leq m$ . Este conjunto foi obtido utilizando as identidades de Bianchi e de Ricci, juntamente com as suas derivadas covariantes. Embora o resultado demonstrado neste capítulo seja o análogo em (2+1)D do conjunto mínimo correspondente para espaços-tempos em (3+1)D [9], o nosso resultado não pode ser considerado um caso particular do mesmo conforme será visto mais adiante.

No capítulo 5 são apresentadas algumas etapas úteis para a realização dos cálculos necessários para se obter a classificação de Karlhede de espaços-tempos em (2+1)D, até a derivada de primeira ordem da curvatura. Na primeira seção, mostra-se como calcular os espinores do conjunto mínimo de invariantes de Cartan, até as derivadas de primeira ordem, a partir de escalares (sob transformações de coordenadas) definidos em relação a uma tríada nula ou uma tríada de Lorentz. As transformações desses espinores também são obtidas a partir das transformações de Lorentz. Na segunda seção, são discutidas diversas etapas com os cálculos necessários para obter a classificação de Karlhede, até a derivada de primeira ordem, utilizando o pacote de computação algébrica *GRTensorII* [10]. Estes resultados constituem os passos iniciais para uma futura implementação do problema da equivalência em (2+1)D.

No capítulo 6, as propriedades locais dos espaços-tempos tipo-Gödel em (2+1)D são investigadas e as suas classificações invariantes obtidas, usando a descrição completa e invariante do campo gravitacional local, obtida com o uso das técnicas do problema da equivalência. Demonstramos um teorema [1] onde obtemos as condições para a homogeneidade espaço-temporal (local). A equivalência dos espaços-tempos tipo-Gödel homogêneos espaço-temporal em (2+1)D é estudada e os resultados obtidos são apresentados em outro teorema [1] com os seguintes resultados: (i) suas classificações invariante são dadas em termos de dois parâmetros essenciais  $m^2$  e  $\omega$ , pares idênticos  $(m^2, \omega)$  correspondem as variedades localmente equivalentes; (ii) quando  $m^2 = 4\omega$ , todos têm um grupo de isometria com 4 parâmetros. Quando  $\omega = 0$  não há rotação e a variedade é conformalmente plana (o tensor de Cotton-York é identicamente nulo). Quando  $m^2 = 4\omega$  obtém-se o

caso especial do espaço-tempo anti-de-Sitter, que é o limite entre os modelos tipo-Gödel homogêneos espaço-temporal causal e não-causal. Os resultados obtidos são comparados com os trabalhos precedentes em espaços-tempos tipo-Gödel homogêneos espaço-temporal em (3+1)D [11].

Finalmente, no apêndice A, são apresentados alguns conceitos básicos do formalismo dos *espinores reais* [12, 13, 14] com dois componentes em espaços-tempos em (2+1)D, utilizado para obter o conjunto mínimo de invariantes de Cartan. Este formalismo pode ser considerado o análogo, para espaços-tempos em (2+1)D, do formalismo de Newman-Penrose [15, 16] com *espinores complexos* com dois componentes em um espaço-tempo em (3+1)D.

---

---

# CAPÍTULO 2

---

## O PROBLEMA DA EQUIVALÊNCIA

A arbitrariedade na escolha de coordenadas é uma hipótese básica subjacente a qualquer teoria covariante da gravitação, essa arbitrariedade origina o problema da equivalência [6, 7, 8], isto é, a questão de distinguir se as métricas de dois espaços-tempos são diferentes ou são iguais e seus componentes estão relacionados por transformações de coordenadas. A solução deste problema requer uma descrição do campo gravitacional local que seja completa e invariante sob transformações de coordenadas. A melhor abordagem para obter a solução deste problema foi desenvolvida por Cartan [5]. Apesar deste trabalho abordar o problema da equivalência em (2+1)D, a solução de Cartan é apresentada para uma variedade pseudo-Riemanniana com dimensão  $n$ . Na primeira seção deste capítulo é apresentado o teorema da equivalência de Cartan, que determina um conjunto de invariantes sob transformações de coordenadas que constitui uma descrição completa do campo gravitacional local. Na seção seguinte obtém-se a partir do conjunto de invariantes apresentado na primeira seção a dimensão do grupo de isometria, a dimensão do subgrupo de isotropia e a dimensão da órbita do grupo.

### 2.1 O Teorema da Equivalência

Nas teorias de gravitação onde o espaço-tempo é dado por uma variedade pseudo-Riemanniana, o campo gravitacional é descrito pelo tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  que é encontrado resolvendo as equações de campo. Nesse contexto, a equivalência local de campos gravitacionais significa o mesmo que isometria local, já que a conexão é completamente determinada pela métrica [17]. Assim, duas variedades pseudo-Riemannianas  $M$  e  $\widetilde{M}$ , de dimensão  $n$ , são localmente equivalentes quando existe um difeomorfismo entre dois sistemas de coordenadas  $(U, x)$  e  $(\widetilde{U}, \tilde{x})$ , definidos nos abertos  $U \subset M$  e  $\widetilde{U} \subset \widetilde{M}$ , dado

por  $x^\mu = x^\mu(\tilde{x}^\nu)$  (onde  $\mu, \nu = 1, 2, \dots, n$ ), tal que

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} g_{\alpha\beta}(x), \quad (2.1)$$

onde  $g_{\alpha\beta}(x)$  e  $\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x})$  são os componentes das métricas em  $M$  e  $\tilde{M}$ , em relação aos sistemas de coordenadas  $(U, x)$  e  $(\tilde{U}, \tilde{x})$ , respectivamente, como mostra a Figura 2.1.

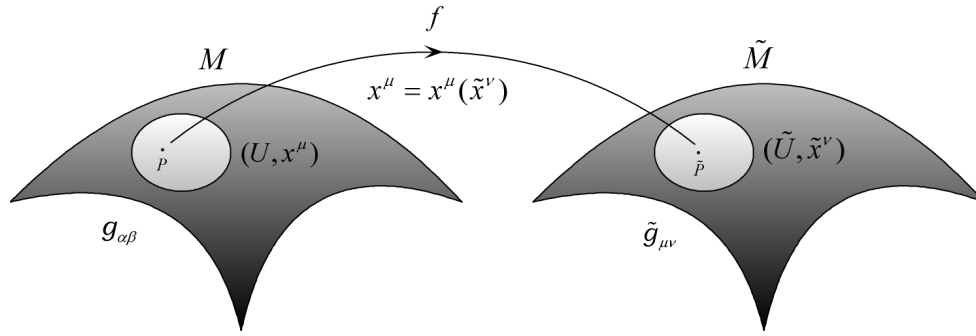


Figura 2.1: Difeomorfismo entre os sistemas de coordenadas  $(U, x)$  e  $(\tilde{U}, \tilde{x})$ , definidos nos abertos  $U \subset M$  e  $\tilde{U} \subset \tilde{M}$ , dado pela aplicação  $x^\mu = x^\mu(\tilde{x}^\nu)$ .

O conjunto mais natural de quantidades invariantes que podem ser usadas para resolver o problema da equivalência é constituído pelos chamados escalares polinomiais da curvatura, construídos a partir da curvatura e suas derivadas covariantes [18]. Entretanto, essa abordagem não resolve o problema em (3+1)D, porque não permite distinguir entre o espaço-tempo plano de Minkowski e o espaço curvo de ondas planas, pois esses invariantes são nulos para ambos [19, 20]. Uma situação similar também ocorre com relação a espaços-tempos em (2+1)D [21] e espaços-tempos de dimensão  $n$  em geral [22]. Portanto, esses invariantes determinam apenas condições necessárias para equivalência (local) de espaços-tempos e não caracterizam de modo único e completo as variedades espaços-tempos.

Agora será enunciado um teorema demonstrado por Cartan que é utilizado para obter a solução do problema da equivalência. Sejam  $M$  e  $\tilde{M}$  duas variedades de dimensão  $n$ , onde estão univocamente definidas duas bases não-holonômicas  $\omega^a = \omega^a_\mu dx^\mu$  e  $\tilde{\omega}^a = \tilde{\omega}^a_\nu d\tilde{x}^\nu$  (onde  $a = 1, 2, \dots, n$ ), nos sistemas de coordenadas  $(U, x)$  e  $(\tilde{U}, \tilde{x})$  de  $M$  e  $\tilde{M}$ , respectivamente. Estas bases, isto é, conjuntos de  $n$  1-formas linearmente independentes, são equivalentes se existir uma aplicação  $x^\mu = x^\mu(\tilde{x}^\nu)$  de  $M$  em  $\tilde{M}$  tal que

$$\omega^a(x) = \tilde{\omega}^a(\tilde{x}). \quad (2.2)$$

Essa definição pode ser visualizada para  $n = 2$  na Figura 2.2 abaixo.

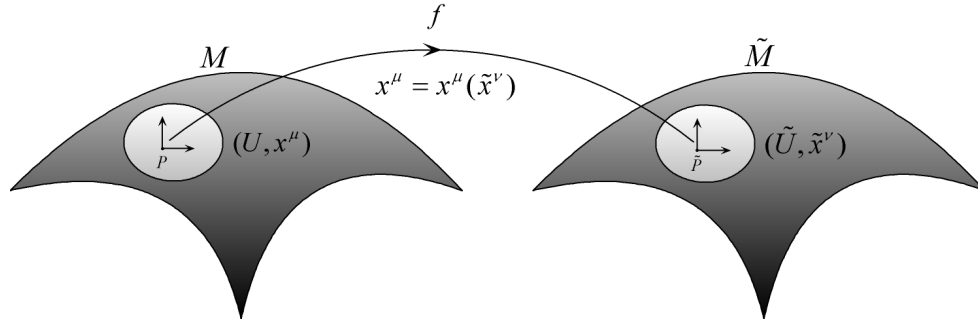


Figura 2.2: Equivalência das bases não-holonômicas  $\omega^a = \omega^a_\mu dx^\mu$  e  $\tilde{\omega}^a = \tilde{\omega}^a_\nu d\tilde{x}^\nu$  univocamente definidas nos sistemas de coordenadas  $(U, x)$  e  $(\tilde{U}, \tilde{x})$  das variedades  $M$  e  $\tilde{M}$ , dada por  $\omega^a(x) = \tilde{\omega}^a(\tilde{x})$ .

As condições de integrabilidade das eq.(2.2) são  $d\omega^a = d\tilde{\omega}^a$ . A derivada exterior da 1-forma  $\omega^a(x)$  são dadas por

$$d\omega^a = \frac{1}{2}C^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c, \quad (2.3)$$

onde  $C^a_{bc}(x)$  é o objeto de não-holonomia, que tem a seguinte simetria  $C^a_{bc} = -C^a_{cb}$ . Portanto, as condições de integrabilidade das eq.(2.2) ficam dadas por

$$C^a_{bc} = \tilde{C}^a_{bc}. \quad (2.4)$$

Por sua vez, as condições de integrabilidade da eq.(2.4) são  $dC^a_{bc} = d\tilde{C}^a_{bc}$ . Considerando que a derivada exterior do objeto de não-holonomia é dada por

$$dC^a_{bc} = C^a_{bc;m}\omega^m, \quad (2.5)$$

onde o ponto-e-virgula representa derivada covariante, então as condições de integrabilidade da eq.(2.4) ficam dadas por

$$C^a_{bc;m} = \tilde{C}^a_{bc;m}. \quad (2.6)$$

Prosseguindo na determinação das condições de integrabilidade, obtém-se sucessivamente derivadas covariantes de ordens superiores do objeto de não-holonomia. Este processo termina quando for calculada uma derivada de ordem  $p + 1$  que seja funcionalmente dependente dos elementos do conjunto  $\{C^a_{bc}, C^a_{bc;m_1}, \dots, C^a_{bc;m_1, \dots, m_p}\}$ , isto é, das derivadas anteriores. Considerando que em uma variedade de dimensão  $n$  existem no máximo  $n$  funções funcionalmente independentes, obtém-se que  $p + 1 \leq n$ . Portanto, pode ser enunciado o teorema de Cartan [7, 5], como sendo:

**Teorema 2.1** *Sejam  $M$  e  $\tilde{M}$  duas variedades de dimensão  $n$ , onde estão univocamente*

definidas duas bases não-holonômicas  $\omega^a = \omega^a{}_\mu dx^\mu$  e  $\tilde{\omega}^a = \tilde{\omega}^a{}_\nu d\tilde{x}^\nu$  nos sistemas de coordenadas  $(U, x)$  e  $(\tilde{U}, \tilde{x})$  de  $M$  e  $\tilde{M}$ , respectivamente. Estas bases são equivalentes se, e somente se, o sistema de equações algébricas

$$\begin{aligned} C^a{}_{bc}(x) &= \tilde{C}^a{}_{bc}(\tilde{x}) \\ C^a{}_{bc;m_1}(x) &= \tilde{C}^a{}_{bc;m_1}(\tilde{x}) \\ &\vdots \\ C^a{}_{bc;m_1\dots m_{p+1}}(x) &= \tilde{C}^a{}_{bc;m_1\dots m_{p+1}}(\tilde{x}), \end{aligned} \tag{2.7}$$

for compatível nas variáveis  $x^\mu$  e  $\tilde{x}^\nu$ . A derivada covariante de ordem  $p+1$  é a derivada de ordem mais baixa que é funcionalmente dependente das derivadas anteriores.

O teorema enunciado acima não pode ser aplicado utilizando uma base não-holonômica no espaço-tempo, porque estas bases não são univocamente definidas. Um base não-holonômica é denominada referencial ortogonal generalizado quando for dada por campos vetoriais  $h_a = h_a{}^\mu(x)\partial_\mu$ , onde os componentes da métrica  $\eta_{ab} = g(h_a, h_b) = g_{\mu\nu}h_a{}^\mu h_b{}^\nu$  são constantes determinadas pelos elementos de uma matriz simétrica  $\eta = (\eta_{ab})$ , com a assinatura apropriada. O co-referencial dual do referencial ortogonal generalizado  $h_a$  é o conjunto de 1-formas  $\theta^a = h^a{}_\mu(x)dx^\mu$ , que satisfaz as seguintes condições  $h_a{}^\nu h^a{}_\mu = \delta^\nu{}_\mu$  e  $h^a{}_\mu h_b{}^\mu = \delta^a{}_b$ . Entre os referenciais com esta propriedade que são utilizados nas teorias da gravitação em (2+1)D tem-se as tríadas de Lorentz, onde a matriz  $\eta$  é dada por  $(\eta_{ab}) = \text{diag}(-1, +1, +1)$  e as tríadas nulas, onde os elementos não nulos da matriz  $\eta$  são  $\eta_{12} = -1$  e  $\eta_{33} = +1$ .

Os referenciais ortogonais generalizados não são determinados de modo único, pois existem transformações lineares não singulares que preservam o produto escalar definido pela métrica. Estas transformações formam um subgrupo do grupo geral linear  $GL(n, R)$ , denominado grupo ortogonal generalizado  $O(n)$ , com  $n(n-1)/2$  parâmetros  $\xi = (\xi^A)$ , onde  $A = 1, 2, \dots, n(n-1)/2$ . Referenciais ortogonais generalizados  $h_a$  e  $\theta^a$ , que são bases duais, se transformam sob o grupo  $O(n)$  de acordo com  $\tilde{h}_b = \Lambda^a{}_b h_a$  e  $\tilde{\theta}^b = (\Lambda^{-1})^b{}_a \theta^a$ , onde  $(\Lambda^{-1})^a{}_b \Lambda_a{}^c = \delta_b{}^c$  e  $\eta_{ab} = \Lambda_a{}^c \eta_{cd} \Lambda_b{}^d = \tilde{\eta}_{ab}$ .

O contexto mais apropriado para resolver o problema da equivalência utilizando a abordagem de Cartan é dado pelo fibrado dos referenciais ortogonais generalizados  $F(M)$  [23, 24, 25, 26] definido sobre uma variedade pseudo-Rimanniana  $M$  com dimensão  $n$ . O fibrado  $F(M)$  é uma variedade pseudo-Riemanniana cujos pontos são dados pelos pares: um ponto  $p$  de  $M$  e um referencial ortogonal generalizado definido em  $p$ . Isto é, uma variedade dada por  $F(M) = \bigcup_{p \in M} F_p$ , onde  $F_p$  é um conjunto de todos os referenciais generalizados definidos em  $p$ , chamado de fibra sobre  $p$ , como mostra a Figura 2.3. As coordenadas de  $F(M)$  são dadas por  $(x, \xi)$ , onde  $x = (x^\mu)$  são as coordenadas de  $M$  e  $\xi = (\xi^A)$  são os parâmetros do grupo ortogonal generalizado  $O(n)$ .

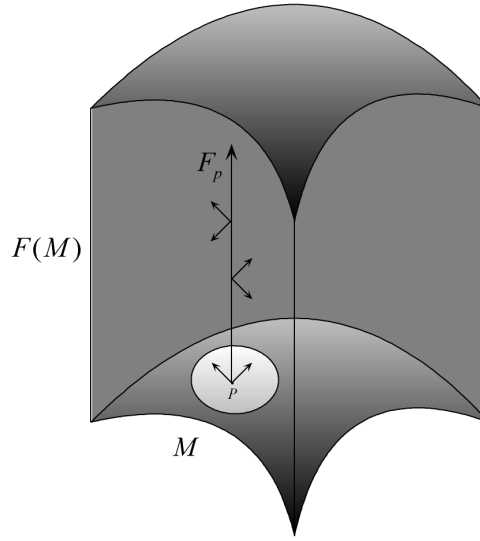


Figura 2.3: Fibrado dos referenciais ortogonais generalizados.

Considerando que no fibrado  $F(M)$  não existe liberdade de transformação de referenciais, obtém-se uma base não-holonômica univocamente definida dada pelas 1-formas canônicas

$$\Theta^a(x, \xi) = e^a{}_\mu(x, \xi) dx^\mu, \quad (2.8)$$

onde  $e^a{}_\mu(x, \xi) = \Lambda^a{}_b(\xi) h^b{}_\mu(x)$  e pelas 1-formas conexão

$$\Sigma^a{}_b(x, \xi) = \Sigma^a{}_{bA} d\xi^A + \Sigma^a{}_{b\mu} dx^\mu, \quad (2.9)$$

onde  $\Sigma^{ab} = -\Sigma^{ba}$ .

É visto agora a aplicação do método de Cartan utilizando o fibrado  $F(M)$  dos referenciais ortogonais generalizados. Diz-se que duas variedades pseudo-Riemannianas  $M$  e  $\tilde{M}$  são localmente equivalentes quando existe um difeomorfismo local entre  $F(M)$  e  $\tilde{F}(\tilde{M})$ , onde  $x^\mu = x^\mu(\tilde{x}^\nu)$  e  $\xi^A = \xi^A(\tilde{\xi}^B)$ , tal que

$$\Theta^a(x, \xi) = \tilde{\Theta}^a(\tilde{x}, \tilde{\xi}), \quad (2.10)$$

$$\Sigma^a{}_b(x, \xi) = \tilde{\Sigma}^a{}_b(\tilde{x}, \tilde{\xi}). \quad (2.11)$$

Com isso pode ser aplicado o teorema 2.1 e desta forma as condições de integrabilidade das eqs.(2.10) e (2.11) serão dadas por

$$d\Theta^a = d\tilde{\Theta}^a \quad (2.12)$$

$$d\Sigma^a{}_b = d\tilde{\Sigma}^a{}_b. \quad (2.13)$$

Estas derivadas exteriores podem ser obtidas diretamente das equações de estrutura de

Cartan para o fibrado  $F(M)$ , que são dadas por

$$d\Theta^a = -\Sigma^a_b \wedge \Theta^b, \quad (2.14)$$

$$d\Sigma^a_b = -\Sigma^a_c \wedge \Sigma^c_b + \Omega^a_b, \quad (2.15)$$

onde a 2-forma curvatura é dada por

$$\Omega^a_b(x, \xi) = \frac{1}{2} R^a_{bcd} \Theta^c \wedge \Theta^d, \quad (2.16)$$

sendo  $R^a_{bcd}(x, \xi)$  os componentes da curvatura de  $F(M)$ . Substituindo a eq.(2.15) na eq.(2.13) obtém-se

$$-\Sigma^a_c \wedge \Sigma^c_b + \Omega^a_b = -\tilde{\Sigma}^a_c \wedge \tilde{\Sigma}^c_b + \tilde{\Omega}^a_b, \quad (2.17)$$

e substituindo a eq.(2.11) na eq.(2.17) pode-se facilmente verificar que

$$\Omega^a_b = \tilde{\Omega}^a_b. \quad (2.18)$$

Substituindo agora a eq.(2.16) na equação eq.(2.18) acima resulta

$$\frac{1}{2} R^a_{bcd} \Theta^c \wedge \Theta^d = \frac{1}{2} \tilde{R}^a_{bcd} \tilde{\Theta}^c \wedge \tilde{\Theta}^d. \quad (2.19)$$

Finalmente, substituindo a eq.(2.10) na eq.(2.19), conclui-se que as condições de integrabilidade ficam dadas por

$$R^a_{bcd} = \tilde{R}^a_{bcd}. \quad (2.20)$$

Por sua vez, as condições de integrabilidade das eqs.(2.20) são  $dR^a_{bcd} = d\tilde{R}^a_{bcd}$ . A derivada exterior do tensor de curvatura  $R^a_{bcd}(x, \xi)$  é dada por [7, 26]

$$dR^a_{bcd} = R^a_{bcd;m} \Theta^m - \Sigma^a_m R^m_{bcd} + \Sigma^m_b R^a_{mcd} + \Sigma^m_c R^a_{bmd} + \Sigma^m_d R^a_{bcm}. \quad (2.21)$$

É importante observar que a derivada da curvatura é calculada em relação as coordenadas  $(x, \xi)$  de  $F(M)$ , pois o tensor de curvatura e suas derivadas são funções de  $(x, \xi)$ . Substituindo a eq.(2.21) nas condições de integrabilidade da eq.(2.20) pode-se concluir sem nenhum esforço, que

$$R^a_{bcd;m} = \tilde{R}^a_{bcd;m}. \quad (2.22)$$

Prosseguindo na determinação das condições de integrabilidade, obtém-se sucessivamente derivadas covariantes de ordens superiores da curvatura. Este processo termina quando for calculada uma derivada de ordem  $p + 1 \leq \frac{1}{2}n(n + 1)$ , onde  $\frac{1}{2}n(n + 1)$  é a dimensão do fibrado  $F(M)$ , que seja funcionalmente dependente dos elementos do conjunto

$\{R^a{}_{bcd}, R^a{}_{bcd;m_1}, \dots, R^a{}_{bcd;m_1, \dots, m_p}\}$ . Considerando estes resultados, o teorema da equivalência de Cartan [6, 7, 8, 19, 23, 24, 25] fica enunciado por:

**Teorema 2.2** *Sejam  $M$  e  $\widetilde{M}$  duas variedades pseudo-Riemannianas de dimensão  $n$ . Sejam  $R^a{}_{bcd}(x, \xi)$  e  $\widetilde{R}^a{}_{bcd}(\widetilde{x}, \widetilde{\xi})$  os componentes da curvatura dos fibrados  $F(M)$  e  $\widetilde{F}(\widetilde{M})$  dos referenciais ortogonais generalizados definidos sobre  $M$  e  $\widetilde{M}$ , respectivamente. As variedades  $M$  e  $\widetilde{M}$  são localmente equivalentes se, e somente se, existir um difeomorfismo local de  $F(M)$  em  $\widetilde{F}(\widetilde{M})$ , onde  $x^\mu = x^\mu(\widetilde{x}^\nu)$  e  $\xi^A = \xi^A(\widetilde{\xi}^B)$ , tal que o sistema de equações algébricas*

$$\begin{aligned} R^a{}_{bcd}(x, \xi) &= \widetilde{R}^a{}_{bcd}(\widetilde{x}, \widetilde{\xi}) \\ R^a{}_{bcd;m_1}(x, \xi) &= \widetilde{R}^a{}_{bcd;m_1}(\widetilde{x}, \widetilde{\xi}) \\ &\vdots \\ R^a{}_{bcd;m_1 \dots m_{p+1}}(x, \xi) &= \widetilde{R}^a{}_{bcd;m_1 \dots m_{p+1}}(\widetilde{x}, \widetilde{\xi}), \end{aligned} \tag{2.23}$$

seja compatível nas coordenadas  $(x^\mu, \xi^A)$  e  $(\widetilde{x}^\nu, \widetilde{\xi}^B)$  dos fibrados  $F(M)$  e  $\widetilde{F}(\widetilde{M})$ , respectivamente. A derivada covariante de ordem  $p+1$  é a derivada de ordem mais baixa que é funcionalmente dependente das derivadas anteriores.

O conjunto  $I_p$  dado por

$$I_p = \{R^a{}_{bcd}, R^a{}_{bcd;m_1}, \dots, R^a{}_{bcd;m_1 \dots m_p}\}, \tag{2.24}$$

representa uma descrição completa e invariante da geometria e seus elementos são chamados de invariantes de Cartan. O sistema de equações dado pelas eqs.(2.23) determina as condições necessárias e suficientes para uma isometria local entre duas variedades pseudo-Riemannianas, isto é, para a equivalência local de espaços-tempos pseudo-Riemannianos nas teorias de gravitação.

O conjunto  $I_p$  pode ser usado para investigar as propriedades de um espaço-tempo pseudo-Riemanniano. Pode-se tirar conclusões somente sobre a geometria local e não a geometria global, desta forma não se pode tirar conclusões sobre a topologia do espaço-tempo. A geometria intrínseca do cone, por exemplo, é localmente plana e localmente equivalente a uma superfície plana, porém o cone não é globalmente equivalente a uma superfície plana.

## 2.2 Invariantes de Cartan e o Grupo de Isometria

Nesta seção é apresentado um teorema que permite calcular as dimensões do grupo de isometria e do seu subgrupo de isotropia a partir dos invariantes de Cartan, dados pelo conjunto  $I_p$  definido pela eq.(2.24).

Uma isometria local é determinada por um campo vetorial  $v^\alpha$  que satisfaz as seguintes condições  $\mathcal{L}_v g_{\mu\nu} = v_{\mu;\nu} + v_{\nu;\mu} = 0$ , isto é, a derivada de Lie dos componentes  $g_{\mu\nu}$  da métrica em relação ao campo de vetores  $v^\alpha$  é nula. Estas são as equações de Killing e suas soluções determinam os campos de vetores de Killing, geradores do grupo de isometria (local) do espaço-tempo. A dimensão do grupo de isometria é determinada pelo número máximo de vetores de Killing linearmente independentes. Existe um subgrupo de isotropia quando existir campos de vetores de Killing, os quais geram grupos de transformações de um parâmetro que deixam invariante os pontos da variedade espaço-tempo, estes campos de vetores de Killing são os geradores do subgrupo de isotropia.

De acordo com a seção anterior, para cada isometria (local) de uma variedade pseudo-Riemanniana  $M$  existe, em correspondência biunívoca, um difeomorfismo no fibrado dos referenciais ortogonais generalizados  $F(M)$  que deixa os invariantes de Cartan inalterados. Portanto, se existem  $k_p$  invariantes de Cartan no conjunto  $I_p$  que sejam funcionalmente independentes, então o sistema de equações algébricas dado pelas eqs.(2.23) tem  $k_p$  equações independentes, e a sua solução depende de  $\frac{1}{2}n(n+1) - k_p$  constantes arbitrárias. Utilizando, separadamente, as funções das coordenadas  $(x^\mu)$  do espaço-tempo e as funções dos parâmetros  $(\xi^A)$  do grupo ortogonal generalizado  $O(n)$ , pode-se demonstrar o seguinte teorema [5, 27]:

**Teorema 2.3** *Seja o fibrado  $F(M)$  dos referenciais ortogonais generalizados com curvatura  $R^a{}_{bcd}$  e coordenadas  $(x^\mu, \xi^A)$ , sobre uma variedade pseudo-Riemanniana  $M$  de dimensão  $n$ . Considerando que  $k_p$  seja o número de funções funcionalmente independentes no conjunto  $\{R^a{}_{bcd}, R^a{}_{bcd;m_1}, \dots, R^a{}_{bcd;m_1\dots m_{p+1}}\}$ , onde  $m_p$  é o número de funções de  $\xi^A$  e  $t_p$  o número de funções de  $x^\mu$ . Então existe em  $M$  um grupo de isometria de dimensão*

$$r = \frac{1}{2}n(n+1) - k_p, \quad (2.25)$$

que tem um subgrupo de isotropia  $H$  de dimensão

$$s = \frac{1}{2}n(n-1) - m_p, \quad (2.26)$$

e que atua em uma órbita de dimensão

$$d = r - s = n - t_p. \quad (2.27)$$

Embora o teorema de Cartan apresente uma solução para o problema da equivalência, a sua aplicação requer uma grande quantidade de cálculos que limita bastante as possibilidades de sua utilidade na prática. Por exemplo, considerando espaços-tempos em (3+1)D, obtém-se que o número total de todos os componentes das derivadas da curvatura é 27.962.020, quando o limite máximo  $p+1 = 10$  ocorrer. Mesmo quando

as identidades de Bianchi e as identidades de Ricci, bem como as derivadas covariantes das mesmas, forem utilizadas para eliminar componentes dependentes, restam ainda 8.690 quantidades independentes [9]. No caso de espaços-tempos em  $(2+1)D$ , como é demonstrado no capítulo 4, existe um total de 4.374 quantidades para o limite máximo  $p + 1 = 6$ , das quais 336 são quantidades independentes [1]. Portanto, é necessário encontrar uma maneira de testar a equivalência na prática e lidar com os cálculos que devem ser realizados. Este problema foi abordado por Karlhede [7, 8] para espaços-tempos em  $(3+1)D$ . O procedimento desenvolvido por Karlhede para testar a equivalência na prática é apresentado no próximo capítulo e adaptado para espaços-tempos em  $(2+1)D$ .

---

---

# CAPÍTULO 3

---

## EQUIVALÊNCIA NA PRÁTICA EM (2+1)D

Neste capítulo é mostrado como as dificuldades de utilizar a solução de Cartan para o problema da equivalência são consideravelmente reduzidas, através de um procedimento prático para testar a equivalência, desenvolvido por Karlhede [7], onde todos os cálculos são realizados na variedade base e a ordem máxima das derivadas é reduzida.

Na primeira seção é apresentada a classificação de Karlhede, na segunda seção as transformações de Lorentz em (2+1)D e na última seção é mostrado a classificação algébrica de um tensor simétrico de segunda ordem, aqui é feita a classificação do tensor de Ricci e do tensor de Cotton-York.

### 3.1 Classificação de Karlhede

A solução de Cartan para o problema da equivalência, apresentado no capítulo anterior, tem um aspecto importante a ser considerado na prática. Em cada ordem  $q = 0, 1, \dots, (p + 1)$  da derivada covariante do tensor de curvatura, há várias propriedades que podem ser determinadas e comparadas, resultando em condições necessárias para testar a equivalência. Portanto, estas propriedades podem ser usadas em cada ordem  $q$  da derivada covariante da curvatura para estabelecer um procedimento prático. O teste termina quando uma dessas condições não for satisfeita. Somente quando todas as condições necessárias para todas as ordens  $q = 0, 1, \dots, (p + 1)$  das derivadas das curvaturas forem satisfeitas, então é necessário verificar a consistência do sistema de equações algébricas dado pelas eqs.(2.23) do capítulo anterior, isto é, as condições necessárias e suficientes para a equivalência. Embora alguns sistemas de equações algébricas possam ser resolvi-

dos utilizando algoritmos, o mesmo não ocorre no caso geral onde é impossível obter a solução através de um algoritmo [4]. Este fato evidencia a relevância da abordagem de Karlhede.

Seguindo esta abordagem, os passos utilizados no algoritmo de Karlhede para testar a equivalência serão explicados a seguir. Inicialmente, utiliza-se o procedimento onde as coordenadas  $x^\mu$  da variedade  $M$  são tratadas separadamente dos parâmetros  $\xi^A$  do grupo das rotações ortogonais generalizadas. Isto é obtido calculando-se os invariantes de Cartan em uma seção do fibrado  $F(M)$  dos referenciais ortogonais generalizados [26], isto é, em relação a um dado referencial ortogonal generalizado. Assim, todos os invariantes de Cartan são projetados na variedade base  $M$  e não dependem mais dos parâmetros do grupo de rotações generalizadas. Logo, o conjunto

$$I_p = \{R^a{}_{bcd}, R^a{}_{bcd;m_1}, \dots, R^a{}_{bcd;m_1\dots m_{p+1}}\}, \quad (3.1)$$

agora é formado pelos componentes da curvatura de  $M$  e das suas derivadas covariantes em relação ao referencial ortogonal generalizado, o qual é definido pela seção local do fibrado de referenciais. Contudo, a dependência dos invariantes de Cartan nos parâmetros  $\xi^A$  do grupo ortogonal generalizado ainda pode ser verificada através do comportamento desses invariantes sob rotações generalizadas.

O próximo passo consiste na redução da dimensão do fibrado efetivamente utilizado para determinar a equivalência, em cada ordem  $q = 0, 1, \dots, (p + 1)$  da derivada covariante da curvatura. Isto é obtido pela escolha de um referencial ortogonal generalizado alinhado com direções invariantes determinadas pelos invariantes de Cartan. Com esta escolha a liberdade de rotações generalizadas é reduzida e o referencial é fixado o máximo possível. Essas direções invariantes são obtidas realizando as classificações algébricas dos invariantes de Cartan, e depois colocando cada um dos invariantes nas respectivas formas canônicas, escolhidas a partir dos resultados das classificações. Os referenciais assim fixados são denominados referenciais canônicos [7]. Esta etapa tem dois aspectos importantes, do ponto de vista prático. Em primeiro lugar, à medida que a dimensão do fibrado é reduzida, a ordem máxima  $q = (p + 1)$  das derivadas da curvatura que precisam ser calculadas também diminui. Em segundo lugar, um conjunto de condições necessárias para a equivalência é obtido a partir das classificações algébricas dos invariantes de Cartan, dadas pelos tipos algébricos, suas formas canônicas e seus grupos de isotropia.

A redução da dimensão do fibrado em cada ordem  $q = 0, 1, \dots, (p + 1)$ , pode ser determinada a partir do grupo de isotropia  $H_q$  do conjunto  $I_q$ . Este grupo é formado pelas rotações generalizadas que deixam invariantes as formas canônicas dos elementos de  $I_q$ . Assim, quando dois espaços-tempos tiverem o mesmo grupo de isotropia  $H_q$ , os números  $m_q$  de funções funcionalmente independentes dos parâmetros  $\xi^A$  também serão

iguais nos dois espaços-tempos [28]. Portanto, a liberdade de rotações generalizadas do referencial canônico é reduzida toda vez que o grupo de isotropia  $H_q$  tiver dimensão menor que  $H_{(q-1)}$ . Neste caso, como  $H_q$  é um subgrupo de  $H_{(q-1)}$ , os parâmetros das rotações generalizadas de  $H_{(q-1)}$  que não pertencem a  $H_q$  podem ser usados para fixar ainda mais o referencial.

O passo seguinte é levar em conta o fato de que os invariantes de Cartan também devem ter a mesma dependência com relação às coordenadas  $x^\mu$  do espaço-tempo, para que haja equivalência. Assim, em cada ordem  $q = 0, 1, \dots, (p + 1)$  da derivada da curvatura utilizada no procedimento prático, também é necessário que os números  $t_q$  de funções funcionalmente independentes das coordenadas  $x^\mu$  nos conjuntos  $I_q$  também sejam iguais nos dois espaços-tempos [28].

Finalmente, de acordo com a solução de Cartan para o problema da equivalência, os invariantes de Cartan devem ser calculados até a ordem  $q = (p + 1)$  das derivadas onde os elementos do conjunto  $I_{(p+1)}$  são funcionalmente dependentes dos elementos do conjunto  $I_p$ . Assim, o procedimento prático estará concluído em uma derivada de ordem  $q$  quando coincidirem tanto os grupos  $H_{(q-1)}$  e  $H_q$ , quanto os números de funções funcionalmente independentes  $t_{(q-1)}$  e  $t_q$ . O último passo consiste justamente na realização dessas comparações. Ocorrendo a igualdade faz-se  $q = (p + 1)$ , finalizando o procedimento. Em caso contrário, aumenta-se  $q$  em uma unidade, retorna-se ao passo inicial e repete-se o procedimento.

Finalmente, todos os passos do procedimento prático discutidos até aqui são resumidos em um algoritmo [1], que começa com as derivadas de ordem  $q = 0$  e tem os seguintes passos:

1. Calcular os elementos do conjunto  $I_q$ , isto é, as derivadas covariantes da curvatura até a ordem  $q$ .
2. Fixar o referencial utilizado, o máximo possível, colocando os elementos de  $I_q$  nas respectivas formas canônicas, obtidas a partir das classificações algébricas dos seus elementos.
3. Determinar o grupo de isotropia  $H_q$  do conjunto  $I_q$ , isto é, as rotações ortogonais generalizadas que deixam invariantes as formas canônicas dos elementos de  $I_q$ .
4. Encontrar o número  $t_q$  de funções funcionalmente independentes das coordenadas  $x^\mu$  nos elementos do conjunto  $I_q$ .
5. Se o grupo  $H_q$  for o mesmo que  $H_{(q-1)}$  e o número de funções funcionalmente independentes  $t_q$  for igual a  $t_{(q-1)}$ , então faz-se  $q = (p + 1)$  e o procedimento termina. Caso contrário, aumenta-se  $q$  em uma unidade, retorna-se ao passo 1 e repete-se o procedimento.

Através desse procedimento obtém-se uma classificação invariante dos espaços-tempos pseudo-Riemannianos de dimensão  $n$ , chamada de classificação de Karlhede, em termos das seguintes propriedades: os conjuntos das formas canônicas em  $I_p$ , dos grupos de isotropia  $\{H_0, \dots, H_p\}$  e dos número de funções independentes  $\{t_0, \dots, t_p\}$ .

Para testar a equivalência de dois espaços-tempos pseudo-Riemannianos as suas classificações de Karlhede são comparadas e só quando elas forem iguais e que é necessário verificar a compatibilidade do sistema de equações dada pelas eqs.(2.23).

Como as fomas canônicas dos tipos de Segre do tensor do Ricci são obtidas realizando transformações de Lorentz, serão dadas na próxima seção as transformações de Lorentz em (2+1)D realizadas em tríadas de Lorentz e em tríadas nulas.

## 3.2 Tríadas Nulas e Transformações de Lorentz

Neste seção serão apresentadas as transformações de Lorentz locais em um espaço-tempo em (2+1)D, que formam o grupo de Lorentz  $SO(2, 1)$  com três parâmetros. Inicialmente serão apresentados as transformações em relação a uma tríada de Lorentz e posteriormente serão apresentadas as transformações em relação a uma tríada nula [29, 30].

Uma tríada  $\{t^a, x^a, z^a\}$  é chamada de tríada de Lorentz se o produto interno não-nulos entre seus vetores forem dados por  $x^a x_a = z^a z_a = -t^a t_a = 1$ , onde  $x^a$  e  $z^a$  são vetores tipo-espaço e  $t^a$  é vetor tipo-tempo, desta forma a métrica tem assinatura  $(- + +)$  e é dada por

$$g_{ab} = -t_a t_b + x_a x_b + z_a z_b. \quad (3.2)$$

As transformações de Lorentz de uma tríada de Lorentz  $\{t^a, x^a, z^a\}$  para outra  $\{t'^a, x'^a, z'^a\}$ , podem ser decompostas em “boosts” e rotações espaciais. “Boosts” no plano dos vetores  $t^a$  e  $x^a$  são as transformações dadas abaixo

$$t'^a = \cosh(\phi) t^a + \sinh(\phi) x^a, \quad x'^a = \sinh(\phi) t^a + \cosh(\phi) x^a, \quad z'^a = z^a, \quad (3.3)$$

onde

$$\cosh(\phi) = \gamma, \quad \sinh(\phi) = \beta\gamma, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad (3.4)$$

que formam o subgrupo  $SU(1, 1)$ . “Boosts” no plano dos vetores  $t^a$  e  $z^a$  são as transformações dadas por

$$t'^a = \cosh(\psi) t^a + \sinh(\psi) z^a, \quad z'^a = \sinh(\psi) t^a + \cosh(\psi) z^a, \quad x'^a = x^a, \quad (3.5)$$

onde

$$\cosh(\phi) = \gamma, \quad \sinh(\phi) = \beta\gamma, \quad (3.6)$$

que também formam o subgrupo  $SU(1, 1)$ . Rotações no plano dos vetores  $x^a$  e  $z^a$  são as transformações dadas abaixo

$$x'^a = \cos(\theta) x^a + \sin(\theta) z^a, \quad z'^a = -\sin(\theta) x^a + \cos(\theta) z^a, \quad t'^a = t^a, \quad (3.7)$$

que formam o subgrupo  $SO(2)$ .

Uma tríada  $\{k^a, n^a, m^a\}$  é chamada de tríada nula se o produto interno não-nulos entre seus vetores forem dados por  $k^a n_a = -1$  e  $m^a m_a = 1$ , onde  $k^a$  e  $n^a$  são vetores nulos e  $m^a$  é vetor tipo-espaço. Desta forma a métrica na tríada nula fica dada pela seguinte equação

$$g_{ab} = -k_a n_b - k_b n_a + m_a m_b. \quad (3.8)$$

A partir de uma tríada de Lorentz pode-se obter uma tríada nula de acordo com

$$k^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(t^a + z^a), \quad n^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(t^a - z^a), \quad m^a = x^a. \quad (3.9)$$

Pode-se obter também, uma tríada de Lorentz a partir de uma tríada nula. Para isto basta usar o seguinte sistema de equações

$$t^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(k^a + n^a), \quad z^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(k^a - n^a), \quad m^a = x^a. \quad (3.10)$$

As transformações de Lorentz de uma tríada nula  $\{k^a, n^a, m^a\}$  para outra tríada nula  $\{k'^a, n'^a, m'^a\}$ , são decompostas em “boosts” no plano dos vetores  $k^a$  e  $n^a$  [29]

$$n'^a = A n^a, \quad k'^a = \frac{1}{A} k^a, \quad m'^a = m^a, \quad (3.11)$$

onde  $A = e^\psi > 0$ , que formam o subgrupo  $SU(1, 1)$ . Rotações nulas que deixam o vetor  $n^a$  invariante [29]

$$k'^a = k^a + B m^a + \frac{1}{2} B^2 n^a, \quad m'^a = m^a + B n^a, \quad n'^a = n^a, \quad (3.12)$$

onde  $B \in \mathbb{R}$ , que formam o subgrupo  $N_n$ , cujas inversas são dadas por

$$k^a = k'^a - B m'^a + \frac{1}{2} B^2 n'^a, \quad m^a = m'^a - B n'^a, \quad n^a = n'^a. \quad (3.13)$$

Rotações nulas que deixam o vetor  $k^a$  invariante

$$n'^a = n^a + C m^a + \frac{1}{2} C^2 k^a, \quad m'^a = m^a + C k^a, \quad k'^a = k^a, \quad (3.14)$$

onde  $C \in \mathbb{R}$ , que formam o subgrupo  $N_k$ , cujas inversas são dadas por

$$n^a = n'^a - C m'^a + \frac{1}{2} C^2 k'^a, \quad m^a = m'^a - C k'^a, \quad k^a = k'^a. \quad (3.15)$$

Na próxima seção serão apresentadas as classificações algébricas do tensor de curvatura e do tensor de Cotton-York de um espaço-tempo em (2+1)D, utilizadas no passo 2 do algoritmo de Karlhede para  $q = 0$  e  $q = 1$ , respectivamente.

### 3.3 Classificação de Segre

Em espaços-tempos em (2+1) dimensões o tensor de Weyl é identicamente nulo [31] e o tensor de curvatura pode ser decomposto em partes irreduzíveis em termos do tensor de Ricci sem traço  $S_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{3} g_{ab} R$  e do escalar de curvatura  $R = R^a{}_a$ , onde  $R_{ab} = R^c{}_{acb}$  é o tensor de Ricci, de acordo com

$$R_{abcd} = g_{ac} S_{bd} - g_{ad} S_{bc} + g_{bd} S_{ac} - g_{bc} S_{ad} - \frac{1}{6} (g_{ad} g_{bc} - g_{ac} g_{bd}) R. \quad (3.16)$$

Portanto, a classificação algébrica do tensor de curvatura é equivalente a classificação algébrica do tensor de Ricci sem traço.

Nesta seção é apresentada a classificação algébrica de um tensor simétrico de segunda ordem, denominada classificação de Segre. Os resultados serão apresentados para o tensor de Ricci  $R_{ab}$ , e depois para o tensor de Ricci sem traço  $S_{ab}$ .

A classificação de Segre de um tensor simétrico de segunda ordem  $R_{ab}$  é obtida a partir do problema de auto-valores do tensor misto

$$(R^a{}_b - \lambda \delta_b^a) v^b = 0, \quad (3.17)$$

onde  $\lambda \in \mathbb{C}$  e  $v^b$  pode ser um vetor complexo. A solução deste problema em um espaço com métrica euclidiana é obtido diagonalizando a matriz formada por  $R^a{}_b$  através de uma transformação de similaridade. Todavia, como a métrica nas teorias de gravitação é a de Lorentz, somente é possível reduzir  $R^a{}_b$  a uma forma canônica de Jordan [32, 33].

O sistema de equações algébricas lineares nos componentes  $v^b$  dos auto-vetores dado pela eq.(3.17) só possui solução não-trivial para valores de  $\lambda$  que sejam soluções da equação algébrica do terceiro grau obtida fazendo igual a zero o determinante

$$|R^a{}_b - \lambda \delta_b^a| = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0, \quad (3.18)$$

onde

$$a = -R^1_1 - R^2_2 - R^3_3 = -R, \quad (3.19)$$

$$b = R^1_1 R^2_2 + R^1_1 R^3_3 + R^2_2 R^3_3 - R^2_3 R^3_2 - R^2_1 R^1_2 - R^3_1 R^1_3, \quad (3.20)$$

$$c = -R^1_1 R^2_2 R^3_3 + R^1_1 R^2_3 R^3_2 - R^2_1 R^3_2 R^1_3 + R^2_1 R^1_2 R^3_3 - R^3_1 R^1_2 R^2_3 + R^3_1 R^1_3 R^2_2. \quad (3.21)$$

De acordo com o teorema fundamental da álgebra a eq.(3.18) tem três raízes, que determinam os auto-valores  $\lambda$  de  $R^a_b$ , que são dadas por

$$\lambda_1 = A, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}(A + a) + i\frac{\sqrt{3}}{2}B, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2}(A + a) - i\frac{\sqrt{3}}{2}B \quad (3.22)$$

onde

$$D = \left(36ba - 108c - 8a^3 + 12\sqrt{12b^3 - 3b^2a^2 - 54bac + 81c^2 + 12ca^3}\right)^{1/3}, \quad (3.23)$$

$$A = \frac{D^2 + 12b - 4a^2}{6D}, \quad B = \frac{D^2 - 12b + 4a^2 - 2aD}{6D}. \quad (3.24)$$

Obtidos os auto-valores, a matriz  $R^a_b$  pode ser reduzida a uma das formas canônicas de Jordan, representadas com a notação de Segre, que é apresentada a seguir. Em um espaço-tempo (2+1)D, as formas de Jordan são dadas por uma matriz diagonal por blocos, onde cada bloco pode ser dado por:

$$\left( \lambda_1 \right), \quad \begin{pmatrix} \lambda_2 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \lambda_3 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

onde os elementos  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  da diagonal principal são um dos auto-valores.

Considerando que a multiplicidade das raízes reais da equação característica pode ser 1, 2 ou 3, e que também podem existir duas raízes complexas conjugadas e uma real, as possíveis formas canônicas de Jordan para  $R^a_b$  que são compatíveis com a assinatura da métrica de Lorentz são [32]

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & \bar{z} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

onde os auto-valores  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$  são reais e os auto-valores  $z$  e  $\bar{z}$  são complexos conjugados. Para cada auto-valor em um dos blocos de Jordan existe associada uma direção principal do tensor de Ricci  $R^a_b$  determinada pelo auto-vetor correspondente, que pode ser tipo-tempo, tipo-espaço ou tipo-nulo. Existe degenerescência quando os auto-valores de dois ou mais blocos de Jordan são iguais.

Na notação de Segre as formas canônicas de Jordan são representadas por uma lista, colocada entre colchetes, com os algarismos que correspondem às dimensões dos blocos de Jordan e com as letras  $z\bar{z}$  que representam os blocos com auto-valores complexo conjugados. Os algarismos correspondentes a blocos com o mesmo auto-valor são escritos juntos entre parêntesis e aos blocos associados a auto-vetores tipo-nulo e tipo-tempo são escritos por último à direita, sendo o correspondente ao auto-vetor tipo-tempo separado por uma vírgula. Assim, utilizando esta notação, as formas canônicas para  $R^a_b$  dadas nas eqs.(3.26), (3.27) acima são representadas por  $[11, 1]$ ,  $[(11), 1]$ ,  $[3]$  e  $[1z\bar{z}]$ , respectivamente. Incluindo as possíveis degenerescências, os tipos de Segre estão dados na Tabela 3.4 na página 25. Os resultados correspondentes em (3+1)D podem ser encontrados, por exemplo, em [17, 34, 33].

Os tipos de Segre também podem ser obtidos a partir do tensor de Ricci em uma tríada nula, utilizando transformações de Lorentz para simplificar o máximo possível seus componentes não-nulos [29, 30]. Assim, através de transformações de Lorentz é possível encontrar uma tríada nula  $\{k^a, n^a, m^a\}$ , com apenas  $k^a n_a = -1$  e  $m^a m_a = 1$  não-nulos, tal que os tipos de Segre e suas degenerescência ficam expressos pelas formas canônicas dadas na Tabela 3.1:

Tipo de Segre	Forma canônica
$[11, 1]$	$R_{ab} = -2\alpha k_{(a} n_{b)} - \beta(k_a k_b + n_a n_b) + \gamma m_a m_b$
$[(11), 1]$	$R_{ab} = \gamma g_{ab} + (\gamma - \alpha)(k_a + n_a)(k_b + n_b)$
$[1(1, 1)]$	$R_{ab} = \alpha g_{ab} + (\gamma - \alpha)m_a m_b$
$[(11), 1]$	$R_{ab} = \alpha g_{ab}$
$[12]$	$R_{ab} = -2\alpha k_{(a} n_{b)} + \lambda k_a k_b + \gamma m_a m_b$
$[(12)]$	$R_{ab} = \alpha g_{ab} + \lambda k_a k_b$
$[3]$	$R_{ab} = \alpha g_{ab} + \mu(k_a m_b + m_a k_b)$
$[1z\bar{z}]$	$R_{ab} = -2\alpha k_{(a} n_{b)} - \beta(k_a k_b - n_a n_b) + \gamma m_a m_b$

Tabela 3.1: Tipos de Segre e formas canônicas para o tensor de Ricci em uma tríada nula  $\{k^a, n^a, m^a\}$ , com apenas  $k^a n_a = -1$  e  $m^a m_a = 1$  não-nulos, onde  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda = \pm 1$  e  $\mu = \pm 1$ . Para o tipo  $[1z\bar{z}]$  tem-se a restrição  $\beta \neq 0$ .

Uma informação importante é que, na Tabela 3.1, o escalar de curvatura é dado por  $R = 2\alpha + \gamma$  para todos os tipos de Segre, exceto os tipos  $[(11,1)]$ ,  $[(12)]$  e  $[3]$  onde  $R = 3\alpha$ .

Os auto-vetores do tipo de Segre  $[11,1]$  constituem uma tríada de Lorentz  $t^a = (k^a +$

$n^a)/\sqrt{2}$ ,  $z^a = (k^a - n^a)/\sqrt{2}$  e  $x^a = m^a$ , com apenas  $t^a t_a = k^a n_a = -1$  e  $z^a z_a = x^a x_a = 1$  não-nulos, os auto-valores correspondentes são  $\delta = \alpha + \beta$ ,  $\rho = \alpha - \beta$  e  $\gamma$ . Portanto, é possível escolher uma triáda de Lorentz  $\{t^a, x^a, z^a\}$  onde o tipo de Segre [11,1] fica expresso pela forma canônica alternativa

$$R_{ab} = -\delta t_a t_b + \gamma x_a x_b + \rho z_a z_b. \quad (3.28)$$

Os auto-vetores para o tipo de Segre [12] são  $k^a$  e  $m^a$  e os respectivos auto-valores são  $\alpha$  e  $\gamma$ , enquanto que no tipo [3] o auto-vetor é  $k^a$  com auto-valor  $\alpha$ . Finalmente, o tipo  $[1z\bar{z}]$  é o único que admite auto-valores complexos. Os auto-vetores são  $k^a \pm i n^a$  e  $m^a$  com os respectivos auto-valores  $\alpha \pm i\beta$  e  $\gamma$ , onde  $\beta \neq 0$ .

Os tipos de Segre e as formas canônicas de Jordan para o tensor de Ricci sem traço  $S_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{3}g_{ab}R$  são obtidos a partir da classificação do tensor de Ricci impondo a condição de traço nulo, isto é,  $S^a_a = S^1_1 + S^2_2 + S^3_3 = 0$  [32]. Neste caso, o determinante na eq.(3.18) fica dado por

$$|S^a_b - \lambda \delta^a_b| = \lambda^3 + b\lambda + c = 0, \quad (3.29)$$

ou seja, a condição de traço nulo é obtida fazendo  $a = 0$  na eq.(3.18). As raízes da eq.(3.29) são obtidas substituindo  $a = 0$  nas eqs.(3.22) e nas eqs.(3.23) e (3.24) para  $A$ ,  $B$  e  $D$ . Com isso obtém-se os tipos de Segre e as formas de Jordan para  $S_{ab}$  dadas na Tabela 3.5 na página 26. Os auto-valores  $\lambda_R$  e  $\lambda_S$  de  $R_{ab}$  e  $S_{ab}$ , respectivamente, estão relacionados por  $\lambda_S = \lambda_R - \frac{1}{4}R$ , onde  $R$  é o escalar de curvatura.

O mesmo processo utilizado para encontrar os tipos de Segre do tensor de Ricci  $R_{ab}$  em uma triáda nula  $\{k^a, n^a, m^a\}$ , também pode ser utilizado para obter os tipos de Segre do tensor de Ricci sem traço  $S_{ab}$ , cujas formas canônicas são dadas na Tabela 3.2.

Tipo de Segre	Forma canônica
[11, 1]	$S_{ab} = -2\alpha (k_{(a}n_{b)} + m_a m_b) - \beta(k_a k_b + n_a n_b)$
[(11), 1]	$S_{ab} = -2\alpha g_{ab} - 3\alpha(k_a + n_a)(k_b + n_b)$
[1(1, 1)]	$S_{ab} = \alpha g_{ab} - 3\alpha m_a m_b$
[(11), 1]	$S_{ab} = 0$
[12]	$S_{ab} = -2\alpha (k_{(a}n_{b)} + m_a m_b) + \lambda k_a k_b$
[(12)]	$S_{ab} = \lambda k_a k_b$
[3]	$S_{ab} = \mu(k_a m_b + m_a k_b)$
[1z $\bar{z}$ ]	$S_{ab} = -2\alpha (k_{(a}n_{b)} + m_a m_b) - \beta(k_a k_b - n_a n_b)$

Tabela 3.2: Tipos de Segre e formas canônicas para o tensor de Ricci sem traço  $S_{ab}$  em uma triáda nula  $\{k^a, n^a, m^a\}$ , com apenas  $k^a n_a = -1$  e  $m^a m_a = 1$  não-nulos, onde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda = \pm 1$  e  $\mu = \pm 1$ . Para o tipo  $[1z\bar{z}]$  tem-se a restrição  $\beta \neq 0$ .

Além do tensor de Ricci e do tensor de Ricci sem traço, um outro tensor importante para o problema da equivalência em (2+1)D é o tensor de Cotton-York, como é mostrado no próximo capítulo, onde é escolhido um conjunto mínimo de invariantes de Cartan no qual o espinor de Cotton-York está incluído. O tensor de Cotton-York desempenha em (2+1)D um papel análogo ao tensor de Weyl em (3+1)D. As propriedades conformes do espaço-tempo em (2+1)D são descritas pelo tensor de Cotton-York [32], dado por

$$C^a_b = \nabla_c \left( R_{bd} - \frac{1}{4} g_{bd} R \right) \eta^{acd}, \quad (3.30)$$

onde  $\eta^{acd} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \epsilon^{acd}$ ,  $\eta_{acd} = \sqrt{-g} \epsilon_{acd}$ ,  $g = \det(g_{ab})$  e  $\epsilon_{abc}$  é o símbolo de Levi-Civita com  $\epsilon_{123} = 1$ . Ele é invariante sob transformações conformes da métrica, é nulo para espaços-tempos conformalmente planos e tem as seguintes propriedades:  $C_{ab} = C_{ba}$ ,  $C^a_a = 0$ , isto é, ele é simétrico e tem traço nulo [32]. Como estas são as mesmas propriedades do tensor de Ricci sem traço  $S_{ab}$ , então as classificações de Segre de  $C_{ab}$  e de  $S_{ab}$  são obtidas da mesma maneira. Elas diferem da classificação do tensor de Ricci pela condição de traço nulo.

A partir dos resultados obtidos, pode-se verificar que, as formas canônicas do tensor de Ricci determinam uma tríada nula  $\{k^a, n^a, m^a\}$ , cujos vetores são alinhados com as direções principais do tensor de Ricci. Estes são os referenciais canônicos utilizados no procedimento prático de Karlhede. Entretanto, eles não são univocamente determinados, pois os tipos de Segre e suas degenerescências têm grupos de isotropia cujos elementos são transformações de Lorentz que deixam invariantes as formas canônicas.

A implementação do algoritmo de Karlhede fica bastante simplificada com o uso do formalismo espinorial, de acordo com o conjunto completo mínimo das derivadas covariantes obtido no próximo capítulo. Por isso, a classificação de Segre é realizada utilizando o espinor  $S_{ABCD} = 2\Phi_{ABCD}$ , que corresponde ao tensor de Ricci sem traço  $S_{ab}$ , através dos escalares reais definidos abaixo

$$\begin{aligned} \Phi_0 = \Phi_{0000} &= \frac{1}{2} S_{ab} k^a k^b = \frac{1}{2} R_{ab} k^a k^b \\ &= \frac{1}{4} (R_{ab} t^a t^b + R_{ab} z^a z^b + 2R_{ab} t^a z^b), \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \Phi_4 = \Phi_{1111} &= \frac{1}{2} S_{ab} n^a n^b = \frac{1}{2} R_{ab} n^a n^b \\ &= \frac{1}{4} (R_{ab} t^a t^b + R_{ab} z^a z^b - 2R_{ab} t^a z^b), \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 = \Phi_{1100} &= \frac{1}{2} S_{ab} n^a k^b = \frac{1}{6} (R_{ab} n^a k^b + R_{ab} m^a m^b) \\ &= \frac{1}{12} (R_{ab} t^a t^b - R_{ab} z^a z^b + 2R_{ab} t^a z^b), \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned}\Phi_1 = \Phi_{1000} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} S_{ab} m^a k^b = \frac{1}{2\sqrt{2}} R_{ab} m^a k^b \\ &= \frac{1}{4} (R_{ab} t^a x^b + R_{ab} z^a x^b),\end{aligned}\quad (3.34)$$

$$\begin{aligned}\Phi_3 = \Phi_{1011} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} S_{ab} m^a n^b = \frac{1}{2\sqrt{2}} R_{ab} m^a n^b \\ &= \frac{1}{4} (R_{ab} t^a x^b - R_{ab} z^a x^b),\end{aligned}\quad (3.35)$$

onde  $\{k^a, n^a, m^a\}$  e  $\{t^a, x^a, z^a\}$  são, respectivamente, uma triáda nula e uma triáda de Lorentz relacionadas pelas eqs.(3.9) e (3.10). O espinor totalmente simetrizado  $\Phi_{ABCD}$  (onde  $A, B, C, D = 0, 1$ ) é chamado de espinor de Ricci (veja apêndice A). As quantidades  $\Phi_X$  (onde  $x = 0, 1, \dots, 4$ ) são escalares sob transformações de coordenadas. Note que, quando a ordem de  $k^a$  e  $n^a$  é invertida o índice 2 em  $\Phi_X$  permanece inalterado, enquanto ocorrem as mudanças  $0 \leftrightarrow 4$  e  $1 \leftrightarrow 3$ .

Usando as quantidades definidas pelas eqs.(3.31)-(3.35) dadas acima e as formas canônicas dadas na Tabela 3.1, pode-se expressar as formas canônicas e os grupos de isotropia para os tipos de Segre do espinor de Ricci em termos das quantidades não-nulas  $\Phi_X$  (onde  $x = 0, 1, \dots, 4$ ) de acordo com a Tabela 3.3.

Tipo de Segre	Forma canônica	Grupo de isotropia
[11, 1]	$\Phi_0 = \Phi_4, \Phi_2$	não tem
[(11), 1]	$\Phi_0 = \Phi_4 = 3\Phi_2$	$SO(2)$
[1(1, 1)]	$\Phi_2$	$SO(1, 1)$
[(11, 1)]	$\Phi_X = 0$ ( $x = 0, 1, 2, 3, 4$ )	$SO(2, 1)$
[21]	$\Phi_4 = 1, \Phi_2$	não tem
[(21)]	$\Phi_4 = 1$	rot. nula, $k^a = \text{inv.}$
[3]	$\Phi_3 = 1$	não tem
[z $\bar{z}$ 1]	$\Phi_0 = -\Phi_4, \Phi_2$	não tem

Tabela 3.3: Formas canônicas dos tipos de Segre do espinor de Ricci  $\Phi_{ABCD}$ , que corresponde ao tensor de Ricci sem traço, com os respectivos grupos de isotropia, dadas em termos dos escalares reais  $\Phi_X$  ( $x = 0, 1, 2, 3, 4$ ) não-nulos. Para o tipo [11,1]  $\Phi_2$  pode ser nulo.

Analogamente, a classificação de Segre do tensor de Cotton-York  $C_{ab}$  é realizada utilizando o espinor de Cotton-York  $C_{ABCD} = \Psi_{ABCD}$ , expresso em termos dos escalares reais definidos abaixo

$$\Psi_0 = \Psi_{0000} = C_{ab} k^a k^b = \frac{1}{2} (C_{ab} t^a t^b + C_{ab} z^a z^b + 2C_{ab} t^a z^b), \quad (3.36)$$

$$\Psi_4 = \Psi_{1111} = C_{ab} n^a n^b = \frac{1}{2} (C_{ab} t^a t^b + C_{ab} z^a z^b - 2C_{ab} t^a z^b), \quad (3.37)$$

$$\Psi_2 = \Psi_{1100} = C_{ab} n^a k^b = \frac{1}{2} (C_{ab} t^a t^b - C_{ab} z^a z^b), \quad (3.38)$$

$$\Psi_1 = \Psi_{1000} = \frac{1}{\sqrt{2}} C_{ab} m^a k^b = \frac{1}{2} (C_{ab} t^a x^b + C_{ab} z^a x^b), \quad (3.39)$$

$$\Psi_3 = \Psi_{1011} = \frac{1}{\sqrt{2}} C_{ab} m^a n^b = \frac{1}{2} (C_{ab} t^a x^b - C_{ab} z^a x^b), \quad (3.40)$$

onde  $\{k^a, n^a, m^a\}$  e  $\{t^a, x^a, z^a\}$  são, respectivamente, uma triáda nula e uma triáda de Lorentz relacionadas pelas eqs.(3.9) e (3.10).

As formas canônicas dos tipos de Segre do espinor de Cotton-York, bem como os respectivos grupos de isotropia, são dados na Tabela 3.3 quando se faz a substituição dos escalares  $\Phi_X$  pelos correspondentes  $\Psi_X$ , onde  $x= 0, 1, 2, 3, 4$ . Note que, quando a ordem de  $k^a$  e  $n^a$  é invertida o índice 2 em  $\Psi_X$  permanece inalterado, enquanto ocorrem as mudanças  $0 \leftrightarrow 4$  e  $1 \leftrightarrow 3$ .

Não é necessário calcular todos os invariantes de Cartan, considerando que os mesmos estão relacionados pelas identidades de Bianchi, as identidades de Ricci e as derivadas covariantes de ambas. No próximo capítulo é abordado o problema de determinar um conjunto mínimo de invariantes de Cartan para cada ordem das derivadas da curvatura, afim de implementar o algoritmo de Karlhede da maneira mais eficiente possível.

Forma de Jordan	Notação de Segre	auto-valores
$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$	[11, 1]	$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$
$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$	[(11), 1]	$\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$
$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$	[1(1, 1)]	$\lambda_3 \neq \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$
$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$	[(11, 1)]	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$
$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$	[12]	$\lambda_1 \neq \lambda_2$
$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$	[(12)]	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$
$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$	[3]	$\lambda$
$\begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & \bar{z} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$	[1z $\bar{z}$ ]	$z \in \mathbb{C}, \lambda$

Tabela 3.4: Formas canônicas de Jordan para um tensor simétrico de segunda ordem, em um espaço-tempo com métrica de Lorentz e (2+1) dimensões, com os correspondentes tipos de Segre e degenerescências. Os auto-valores  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  e  $\lambda$  são reais e os auto-valores  $z$  e  $\bar{z}$  são complexos conjugados.

Forma de Jordan	Notação de Segre	auto-valores
$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_1 - \lambda_2 \end{pmatrix}$	[11, 1]	$\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_3 = -\lambda_1 - \lambda_2$
$\begin{pmatrix} -2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$	[(11), 1]	$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda, \lambda_1 = -2\lambda$
$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda \end{pmatrix}$	[1(1, 1)]	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \lambda_3 = -2\lambda$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	[(11, 1)]	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$
$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda \end{pmatrix}$	[12]	$\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = -2\lambda$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	[(12)]	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	[3]	$\lambda = 0$
$\begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & \bar{z} & 0 \\ 0 & 0 & -2\text{Re}z \end{pmatrix}$	[1z $\bar{z}$ ]	$\lambda = -2\text{Re}z, z \in \mathbb{C}$

Tabela 3.5: Formas canônicas de Jordan para um tensor simétrico de segunda ordem de traço nulo, em um espaço-tempo com métrica de Lorentz e (2+1) dimensões, com os correspondentes tipos de Segre e degenerescências. Os auto-valores  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  e  $\lambda$  são reais e os auto-valores  $z$  e  $\bar{z}$  são complexos conjugados.

---

---

## CAPÍTULO 4

---

# UM CONJUNTO MÍNIMO DE INVARIANTES EM $(2+1)D$

Para testar a equivalência é necessário calcular as derivadas covariantes da curvatura. Para uma simplificação nos cálculos, é desejável especificar um conjunto mínimo dos invariantes de Cartan a serem calculados em cada ordem  $q = 0, 1, 2, \dots, (p + 1)$  das derivadas covariantes da curvatura e este capítulo se dedica a este objetivo. Portanto, é de extrema importância obter um conjunto mínimo dos componentes das derivadas de ordem  $n$  do espinor de curvatura tal que todas as derivadas de ordem  $m$  podem ser expressas algebricamente em termos desses conjuntos para  $n \leq m$ .

Um aspecto relevante a ser considerado quando se calcula as derivadas covariantes do tensor de curvatura consiste no fato delas estarem relacionadas entre si através das identidades de Bianchi e de Ricci. O resultado novo que é demonstrado neste capítulo, para espaços-tempos em  $(2+1)D$ , é análogo ao resultado obtido por MacCallum e Aman [9] para espaços-tempos em  $(3+1)D$ .

Embora existam outros conjuntos mínimos (relacionados com o conjunto aqui escolhido pela aplicação das identidades de Ricci e de Bianchi), o conjunto escolhido tem duas propriedades importantes: é definido recursivamente (isso evita a necessidade de calcular derivadas adicionais de ordem  $n$  das quantidades a fim de encontrar derivadas de ordem mais altas) e contém somente espinores totalmente simétricos. Por serem totalmente simétricos isso facilita a notação e reduz consideravelmente o número de quantidades independentes a serem calculadas.

## 4.1 Quantidades Independentes

Antes de especificar o conjunto mínimo de invariantes de Cartan obtido neste trabalho, é importante determinar o número de quantidades algebricamente independentes necessárias para especificar os invariantes formados a partir da derivada de ordem  $n$  da curvatura. Para um espaço-tempo em (2+1)D, este número é dado por

$$\mathcal{I}_n = \frac{3}{2}(n+4)(n+1). \quad (4.1)$$

O resultado acima pode ser facilmente obtido a partir dos invariantes formados com as derivadas parciais de ordem  $(n+2)$  da métrica, em um dado sistema de coordenadas. Uma vez que as derivadas parciais comutam, todas as derivadas são expressas em termos das derivadas totalmente simetrizadas  $g_{(ab),(c_1,c_2,\dots,c_{n+2})}$ . O número destas quantidades pode ser facilmente encontrado a partir do cálculo, para cada um dos 6 componentes independentes da métrica  $g_{(ab)}$ , da combinação com repetição dos  $N = n+2$  índices das coordenadas em cada simetrização  $(c_1, c_2, \dots, c_{n+2})$  entre os  $K = 3$  diferentes possíveis valores para as coordenadas, cujo resultado é dado por

$$6 \frac{(N+K-1)!}{(K-1)!N!} = \frac{6(n+4)!}{2!(n+2)!} = 3(n+4)(n+3). \quad (4.2)$$

Entretanto, é necessário considerar as possíveis transformações de coordenadas, especificada por três funções cujas derivadas de ordem  $(n+3)$  contribuem para as derivadas de ordem  $(n+2)$  da métrica. Por um argumento similar ao anterior, obtém-se

$$\frac{3(n+5)!}{2!(n+3)!} = \frac{3}{2}(n+5)(n+4) \quad (4.3)$$

contribuições distintas que surgem deste modo. Portanto o número das quantidades independentes dado na eq.(4.1) é a diferença entre os valores dados na eq.(4.2) e na eq.(4.3).

O número total acumulado de quantidades independentes nas derivadas covariantes da curvatura, desde a ordem 0 até a ordem  $n$ , dado por

$$\sum_{k=0}^{k=n} \mathcal{I}_k = \frac{1}{2}(n+6)(n+2)(n+1), \quad (4.4)$$

é consideravelmente menor do que o número dos componentes da derivada da curvatura de ordem  $n$  dado por  $6 \times 3^n$ . Por exemplo, no limite máximo  $n = 6$  da ordem das derivadas na solução de Cartan, o número de componentes da derivada covariante da curvatura é 4.374 e o número acumulado de quantidades independentes é 336. De maneira similar para  $n = 5$  os números são 1.458 e 231, respectivamente. Portanto, é necessário uma

implementação em computação algébrica para realizar os cálculos, visto que o número de quantidades a serem calculadas é muito grande.

Para terminar essa seção, é importante apresentar as formas espinoriais das identidades de Bianchi e Ricci que estão demonstrada no apêndice A e são dadas, respectivamente, pelas equações

$$\nabla^{AB}\Phi_{ABCD} + \frac{1}{12}\nabla_{CD}\Lambda = 0, \quad (4.5)$$

$$\nabla_{(A}^N \nabla_{B)N}\psi_C = \Phi_{ABCD}\psi^D + \frac{\Lambda}{6}(\epsilon_{CA}\psi_B + \epsilon_{CB}\psi_A). \quad (4.6)$$

Estas equações são utilizadas na obtenção do conjunto mínimo que é o resultado novo obtido neste trabalho.

## 4.2 Conjunto Mínimo

Nesta seção é demonstrado que um conjunto completo mínimo para as derivadas de ordem  $m$  da curvatura de um espaço-tempo em (2+1)D, denotado por  $\mathcal{C}^m = \nabla^0 R \cup \nabla^1 R \cup \dots \cup \nabla^m R$ , onde  $\nabla^n R$  (para  $0 \leq n \leq m$ ) é o conjunto formado pelos espinores abaixo:

- (i) A derivada totalmente simetrizada de ordem  $n$  do espinor de Ricci

$$\nabla_{(AX} \nabla_{BW} \cdots \nabla_{GZ} \Phi_{HKLM)}.$$

- (ii) A derivada totalmente simetrizada de ordem  $n$  do escalar de curvatura

$$\nabla_{(AX} \nabla_{BW} \cdots \nabla_{GZ} \Lambda).$$

- (iii) Para  $n \geq 1$ , a derivada totalmente simetrizada de ordem  $(n - 1)$  do espinor de Cotton-York  $\nabla_{(AX} \nabla_{BW} \cdots \nabla_{GZ} \Psi_{HKLM)}.$

- (iv) Para  $n \geq 2$ , o d'Alembertiano para todas as quantidades no conjunto  $\nabla^{n-2} R$ , dado por  $\square Q \equiv \nabla^{NK} \nabla_{NK} Q$ , onde  $Q$  é um elemento do conjunto  $\nabla^{n-2} R$ .

O conjunto acima foi obtido seguindo um raciocínio análogo ao usado por MacCallum e Aman [9], considerando que as relações entre as quantidades complexas em (3+1)D são análogas as relações entre as quantidades reais em (2+1)D. A diferença mais importante está na ausência do espinor de Weyl e no uso de espinores reais de dois componentes em (2+1)D.

O resultado novo obtido neste capítulo é dado pelo teorema 4.1 abaixo.

**Teorema 4.1** *Todos os componentes da derivada de ordem  $n$  do tensor de curvatura, de um espaço-tempo em (2+1)D, podem ser algebricamente expressos em termos dos elementos do conjunto  $\mathcal{C}^n = \nabla^0 R \cup \nabla^1 R \cup \dots \cup \nabla^n R$ ; este é um conjunto mínimo de derivadas [1].*

O teorema acima é válido para  $n = 0$ , pois afirma que o espinor de curvatura pode ser expresso em termos dos espinores  $\Phi_{ABCD}$  e  $\Lambda$ , isto é, a decomposição da curvatura em suas partes irredutíveis. Conseqüentemente, as derivadas de ordem  $n$  da curvatura para  $n \geq 0$  são dadas pelas derivadas de ordem  $n$  dos espinores  $\Phi_{ABCD}$  e  $\Lambda$ .

Analogamente a MacCallum e Åman definimos a seguinte relação de equivalência (denotada por  $\sim$ ): duas derivadas da curvatura de ordem  $n$  são equivalentes se a diferença entre elas for uma expressão algébrica contendo derivadas da curvatura até a ordem  $(n-1)$ . As identidades de Ricci mostram que, para qualquer espinor  $Q$ , a derivada anti-simetrizada

$$(\nabla_A^X \nabla_B^Y - \nabla_B^Y \nabla_A^X)Q = \epsilon_{AB} \nabla_C^{(X} \nabla^{Y)C} Q + \epsilon^{XY} \nabla_{Z(A} \nabla_{B)}^Z Q \sim 0, \quad (4.7)$$

Conseqüentemente todas as derivadas de ordem  $n$  com os mesmos índices nos seus operadores diferenciais, independentemente da ordem dos operadores, são equivalentes. Além disso, uma conseqüência da eq.(4.7) é

$$\nabla_C^X \nabla^{YC} Q \sim \epsilon^{XY} \nabla^{ZC} \nabla_{ZC} Q = \epsilon^{XY} \square Q. \quad (4.8)$$

A derivada de ordem  $n$  da curvatura pode ser decomposta em partes irredutíveis, contendo uma parte totalmente simetrizada e outras partes, definidas através de contrações, dadas por produtos do espinor  $\epsilon$  com derivadas de ordem  $n$  com um número menor de índices livres totalmente simetrizados [15, 16]. As partes totalmente simetrizadas são respectivamente, a derivada totalmente simetrizada de ordem  $n$  do espinor de Ricci e a derivada totalmente simetrizada de ordem  $n$  do escalar de curvatura que são dadas pelos itens (i) e (ii) do conjunto  $\nabla^n R$ . Assim é preciso considerar somente as partes envolvendo contrações.

A indução matemática é usada para provar que todas as partes com contrações podem ser expressas algebricamente usando as quantidades dadas nos itens (i)-(iv) do conjunto  $\nabla^n R$ , isto é, as derivadas totalmente simetrizadas de ordem  $n$  do espinor de Ricci e do escalar de curvatura, a derivada totalmente simetrizada de ordem  $(n-1)$  do espinor de Cotton-York e o d'Alembertiano de todas as quantidades do conjunto  $\nabla^{n-2} R$ . A hipótese indutiva está presente sempre que forem usadas as eq.(4.7) e eq.(4.8), uma vez que a equivalência ( $\sim$ ) envolve termos contendo derivadas de ordens mais baixas e é necessário supor que estes também podem ser expressos em termos das quantidades dadas nos itens (i)-(iv) do conjunto  $\nabla^n R$ .

As partes que envolvem contrações são somas simétricas de termos, cada um contendo contrações. Se os índices contraídos pertencerem a um par de operadores de diferenciação cujos outros índices não estiverem contraídos entre si, o termo pode ser ignorado como um resultado da eq.(4.7) ou é convertida para eq.(4.8) em um termo que envolve contrações de ambos os pares de índices em um certo par de operadores de diferenciação

(que vai formar assim o d'Alembertiano). Para esse segundo termo de contração, pode-se trazer o d'Alembertiano para a esquerda na eq.(4.7); tais termos serão incluídos no item (iv).

Para completar a demonstração do teorema, falta provar que os termos onde as únicas contrações estão entre os índices dos operadores de diferenciação e os índices do espinor de curvatura, também podem ser expressos pelos itens (i)-(iii), isto é, as derivadas totalmente simetrizadas de ordem  $n$  do espinor de Ricci e do escalar de curvatura e a derivada totalmente simetrizada de ordem  $(n - 1)$  do espinor de Cotton-York.

Usando a eq.(4.7) todos os operadores de diferenciação cujos índices estão contraídos com os índices dos componentes do espinor de curvatura podem ser trazidos para a direita. O escalar de curvatura pode ser ignorado, uma vez que não tem nenhum índice para ser contraído.

De acordo com a definição de  $\Psi_{ABCD} = -\sqrt{2} \nabla^N_{(A} \Phi_{BCD)N}$ , a contração de um operador de diferenciação com o espinor de Ricci origina somente derivadas de  $\Psi_{ABCD}$ . A contração entre o espinor de Ricci  $\Phi_{ABCD}$  e um operador de diferenciação  $\nabla_{EF}$  tem uma parte simétrica a qual é  $\Psi_{ABCD}$  e uma parte anti-simétrica a qual se reduz a derivada totalmente simetrizada do escalar de curvatura dada no item (ii), utilizando as identidades de Bianchi dadas pelas eqs.(4.5). Como a derivada totalmente simetrizada de  $\Psi_{ABCD}$  é dada no item (iii), é necessário apenas considerar os termos em que há uma contração de um operador de diferenciação com  $\Psi_{ABCD}$ , isto é, com  $\nabla^N_{(A} \Phi_{BCD)N}$ . Portanto, para completar a demonstração falta analisar as derivadas  $\nabla^A_F (\nabla^N_A \Phi_{BCDN})$  e  $\nabla^F_B (\nabla^N_A \Phi^B_{CDN})$ . A primeira derivada, devido as observações precedentes sobre termos com contrações entre operadores de diferenciação, resulta em quantidades que já são incluídas. A segunda derivada é equivalente a uma soma de termos da forma

$$\nabla^F_B (\nabla^N_A \Phi^B_{CDN}) = \nabla^F_A (\nabla^N_B \Phi^B_{CDN}) + \epsilon_{AB} \nabla^{FG} (\nabla^N_G \Phi^B_{CDN}), \quad (4.9)$$

de acordo com o método usual de decomposição. O primeiro termo do lado direito da eq.(4.9) reduz-se, pela identidades de Bianchi dadas na eq.(4.5), a derivada totalmente simetrizada de ordem  $n$  do escalar de curvatura, a qual é dada no item (ii) e o segundo termo reduz-se, pelas eq.(4.7) e eq.(4.8), ao d'Alembertiano que é uma quantidade incluída no item (iv).

Tendo provado que o conjunto dado pelos itens (i)-(iv) pode expressar todas as derivadas de ordem  $n$  da curvatura falta mostrar que é mínimo. Isto é feito simplesmente por um argumento de contagem.

É fácil verificar, por um argumento similar e mais simples do que aquele que foi utilizado para a contagem dos invariantes, que as quantidades reais independentes nas partes constituintes do conjunto  $\nabla^n R$  definido acima são:  $(2n + 1) + 4$  no item (i),

$(2n + 1)$  no item (ii),  $[2(n - 1) + 1] + 4$  no item (iii) e, supondo a hipótese da indução,  $3(n + 2)(n - 1)/2$  no item (iv). O número total de quantidades no conjunto  $\nabla^n R$  é, conseqüentemente,  $3(n + 4)(n + 1)/2$  e coincide com o resultado dado na eq.(4.1). Isto completa a prova do teorema.

Com esse capítulo fica completa a parte teórica do problema da equivalência de espaços-tempos em (2+1)D, restando a questão da implementação em um pacote de computação algébrica. No próximo capítulo é apresentado alguns cálculos utilizando o pacote do sistema geral de computação algébrica *Maple*, denominado *GRTensorII*, específico para cálculos em Relatividade Geral.

---

---

# CAPÍTULO 5

---

## CÁLCULOS EM COMPUTAÇÃO ALGÉBRICA

Neste capítulo é apresentado algumas etapas úteis para a realização dos cálculos necessários para obter a classificação de Karlhede de espaços-tempos em  $(2+1)D$ , para as derivadas de ordem  $q = 0$  e ordem  $q = 1$ , em relação a uma tríada nula. Na primeira seção os espinores do conjunto mínimo de invariantes de Cartan, até as derivadas de primeira ordem, serão calculados a partir de escalares (sob transformações de coordenadas) definidos em relação a uma tríada nula ou uma tríada de Lorentz. As transformações desses espinores também serão obtidas a partir das transformações de Lorentz. Na segunda seção, serão discutidas diversas etapas para a realização dos cálculos necessários para obter a classificação de Karlhede até a derivada de ordem 1 da curvatura, utilizando comandos do pacote de computação algébrica *GRTensorII*. Estes resultados constituem os passos iniciais para uma futura implementação do problema da equivalência em  $(2+1)D$ .

O *GRTensorII* é um pacote de computação algébrica desenvolvido para calcular e manipular componentes dos tensores e objetos relacionados que são utilizados na Relatividade Geral. Foi desenvolvido para ser utilizado com o sistema de computação algébrica *Maple*. Sua distribuição é gratuita, podendo ser obtido pela internet no site [www.grtensor.org](http://www.grtensor.org), juntamente com as apostilas que ensinam como usar o *GRTensorII*.

No *GRTensorII* os cálculos são realizados em uma variedade Riemanniana ou pseudo-Riemanniana. Existem comandos e rotinas especiais para produzir e calcular diversos objetos geométricos como o tensor métrico, os símbolos de Christoffel, o tensor de curvatura, etc. O usuário tem liberdade para escolher tanto a dimensão da variedade ( $n \geq 2$ ) quanto a assinatura da métrica (euclidiana, Lorentz, etc.). A flexibilidade do *GRTensorII* permite que adaptações e expansões sejam realizadas através da definição de

novos objetos, de algoritmos definidos pelo usuário, e da adição de novas bibliotecas de cálculos.

## 5.1 Conjunto Mínimo

Nesta seção os espinores do conjunto mínimo de invariantes de Cartan, até as derivadas de primeira ordem, serão calculados a partir de escalares (sob transformações de coordenadas) definidos em relação a uma tríada nula ou uma tríada de Lorentz. As transformações desses espinores também serão obtidas a partir das transformações de Lorentz. Esses resultados são necessários para a implementação dos passos 1 e 2 do algoritmo de Karlhede.

O conjunto mínimo, para a derivada de ordem zero da curvatura, inclui apenas o espinor de Ricci  $\Phi_{ABCD}$  e o escalar de curvatura  $\Lambda$ . Como  $\Lambda = R$  é um escalar, é necessário apenas determinar os componentes de  $\Phi_{ABCD}$ . Estes componentes podem ser obtidos a partir dos escalares (sob transformações de coordenadas)  $\Phi_X (X=0, 1, \dots, 4)$ , definidos (no capítulo 3) de acordo com

$$\begin{aligned} \Phi_0 = \Phi_{0000} &= \frac{1}{2} S_{ab} k^a k^b = \frac{1}{2} R_{ab} k^a k^b \\ &= \frac{1}{4} (R_{ab} t^a t^b + R_{ab} z^a z^b + 2R_{ab} t^a z^b), \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \Phi_4 = \Phi_{1111} &= \frac{1}{2} S_{ab} n^a n^b = \frac{1}{2} R_{ab} n^a n^b \\ &= \frac{1}{4} (R_{ab} t^a t^b + R_{ab} z^a z^b - 2R_{ab} t^a z^b), \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 = \Phi_{1100} &= \frac{1}{2} S_{ab} n^a k^b = \frac{1}{6} (R_{ab} n^a k^b + R_{ab} m^a m^b) \\ &= \frac{1}{12} (R_{ab} t^a t^b - R_{ab} z^a z^b + 2R_{ab} x^a x^b), \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \Phi_1 = \Phi_{1000} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} S_{ab} m^a k^b = \frac{1}{2\sqrt{2}} R_{ab} m^a k^b \\ &= \frac{1}{4} (R_{ab} t^a x^b + R_{ab} z^a x^b), \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \Phi_3 = \Phi_{1011} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} S_{ab} m^a n^b = \frac{1}{2\sqrt{2}} R_{ab} m^a n^b \\ &= \frac{1}{4} (R_{ab} t^a x^b - R_{ab} z^a x^b), \end{aligned} \quad (5.5)$$

onde  $\{k^a, n^a, m^a\}$  e  $\{t^a, x^a, z^a\}$  são, respectivamente, uma tríada nula e uma tríada de Lorentz relacionadas pelas eqs.(3.9) e (3.10).

As transformações do espinor de Ricci são obtidas a partir das transformações de Lorentz dos escalares  $\Phi_X$  em relação a uma tríada nula, isto é, “boosts” e rotações nulas. Realizando um “boost” com parâmetro  $A$ , dado pelas eqs.(3.11), e utilizando as definições

dadas nas eqs.(5.1)–(5.5), obtém-se que as transformações de  $\Phi_X$  são

$$\Phi'_4 = \frac{1}{A^2}\Phi_4, \quad (5.6)$$

$$\Phi'_3 = \frac{1}{A}\Phi_3, \quad (5.7)$$

$$\Phi'_2 = \Phi_2, \quad (5.8)$$

$$\Phi'_1 = A\Phi_1, \quad (5.9)$$

$$\Phi'_0 = A^2\Phi_0. \quad (5.10)$$

De acordo com as transformações acima, pode se verificar que o espinor de Ricci  $\Phi_{ABCD}$  é invariante sob “boosts” quando o único escalar não-nulo for  $\Phi_2$ . A transformação de  $\Phi_X$  sob uma rotação nula com  $n^a$  invariante e parâmetro  $B$ , dada pelas eqs.(3.12), é obtida de modo semelhante, sendo dada por

$$\Phi'_4 = \Phi_4, \quad (5.11)$$

$$\Phi'_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}B\Phi_4 + \Phi_3, \quad (5.12)$$

$$\Phi'_2 = \frac{1}{2}B^2\Phi_4 + B\sqrt{2}\Phi_3 + \Phi_2, \quad (5.13)$$

$$\Phi'_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}B^3\Phi_4 + \frac{3}{2}B^2\Phi_3 + \frac{3\sqrt{2}}{2}B\Phi_2 + \Phi_1, \quad (5.14)$$

$$\Phi'_0 = \frac{1}{4}B^4\Phi_4 + \sqrt{2}B^3\Phi_3 + 3C^2\Phi_2 + 2\sqrt{2}B\Phi_1 + \Phi_0. \quad (5.15)$$

De acordo com as transformações acima, pode se verificar que o espinor de Ricci  $\Phi_{ABCD}$  é invariante sob rotações nulas com  $n^a$  invariante quando o único escalar não-nulo for  $\Phi_0$ . Finalmente, a transformação de  $\Phi_X$  sob uma rotação nula com  $k^a$  invariante e parâmetro  $C$ , dada pelas eqs.(3.14), é dada por

$$\Phi'_0 = \Phi_0, \quad (5.16)$$

$$\Phi'_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}C\Phi_0 + \Phi_1, \quad (5.17)$$

$$\Phi'_2 = \frac{1}{2}C^2\Phi_0 + C\sqrt{2}\Phi_1 + \Phi_2, \quad (5.18)$$

$$\Phi'_3 = \frac{\sqrt{2}}{4}C^3\Phi_0 + \frac{3}{2}C^2\Phi_1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}C\Phi_2 + \Phi_3, \quad (5.19)$$

$$\Phi'_4 = \frac{1}{4}C^4\Phi_0 + \sqrt{2}C^3\Phi_1 + 3C^2\Phi_2 + 2\sqrt{2}C\Phi_3 + \Phi_4. \quad (5.20)$$

De acordo com as transformações acima, pode se verificar que o espinor de Ricci  $\Phi_{ABCD}$  é invariante sob rotações nulas com  $k^a$  invariante quando o único escalar não-nulo for  $\Phi_4$ .

O conjunto mínimo para a derivada de primeira ordem da curvatura inclui o es-

pinor de Cotton-York  $\Psi_{ABCD}$ , a derivada covariante totalmente simetrizada do espinor de Ricci  $\nabla_{(AB}\Phi_{CDEF)}$  e a derivada do escalar de curvatura  $\nabla_{AB}\Lambda$ . Primeiramente serão determinados os componentes de  $\Psi_{ABCD}$ . Estes componentes podem ser obtidos a partir dos escalares (sob transformações de coordenadas)  $\Psi_X$  ( $X = 0, 1, 2, 3, 4$ ), definidos em termos do tensor de Cotton-York  $C_{ab}$  (no capítulo 3) de acordo com

$$\Psi_0 = \Psi_{0000} = C_{ab}k^ak^b = \frac{1}{2} (C_{abt^at^b} + C_{abz^az^b} + 2C_{abt^az^b}), \quad (5.21)$$

$$\Psi_4 = \Psi_{1111} = C_{ab}n^an^b = \frac{1}{2} (C_{abt^at^b} + C_{abz^az^b} - 2C_{abt^az^b}), \quad (5.22)$$

$$\Psi_2 = \Psi_{1100} = C_{ab}n^ak^b = \frac{1}{2} (C_{abt^at^b} - C_{abz^az^b}), \quad (5.23)$$

$$\Psi_1 = \Psi_{1000} = \frac{1}{\sqrt{2}}C_{ab}m^ak^b = \frac{1}{2} (C_{abt^ax^b} + C_{abz^ax^b}), \quad (5.24)$$

$$\Psi_3 = \Psi_{1011} = \frac{1}{\sqrt{2}}C_{ab}m^an^b = \frac{1}{2} (C_{abt^ax^b} - C_{abz^ax^b}), \quad (5.25)$$

onde  $\{k^a, n^a, m^a\}$  e  $\{t^a, x^a, z^a\}$  são, respectivamente, uma triáda nula e uma triáda de Lorentz relacionadas pelas eqs.(3.9) e (3.10). Como as transformações de  $\Psi_X$  são realizadas de maneira análoga as de  $\Phi_X$ , não serão exibidas aqui.

Em segundo lugar, é determinada a derivada do escalar de curvatura  $\Lambda$ . Os componentes de  $\nabla_{AB}\Lambda$  podem ser obtidos a partir dos escalares (sob transformações de coordenadas)  $(D\Lambda)_a$  ( $a = 0, 1, 2$ ), definidos de acordo com

$$(D\Lambda)_0 = \nabla_{00}\Lambda = k^a\nabla_a\Lambda, \quad (5.26)$$

$$(D\Lambda)_1 = \nabla_{01}\Lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}x^a\nabla_a\Lambda, \quad (5.27)$$

$$(D\Lambda)_2 = \nabla_{11}\Lambda = n^a\nabla_a\Lambda. \quad (5.28)$$

A seguir serão apresentadas as transformações de  $(D\Lambda)_a$  sob “boosts” e rotações nulas. Realizando um “boost” com parâmetro  $A$ , dado pelas eqs.(3.11), obtém-se

$$(D\Lambda)'_2 = \frac{1}{A}(D\Lambda)_2, \quad (5.29)$$

$$(D\Lambda)'_1 = (D\Lambda)_1, \quad (5.30)$$

$$(D\Lambda)'_0 = A(D\Lambda)_0. \quad (5.31)$$

De acordo com as transformações acima, obtém-se que a derivada do escalar de curvatura  $\nabla_{AB}\Lambda$  é invariante sob “boosts” quando o único escalar não-nulo for  $(D\Lambda)_1$ . A transformação de  $(D\Lambda)_a$  sob uma rotação nula com  $n^a$  invariante e parâmetro  $B$ , dada pelas

eqs.(3.12), é dada por

$$(D\Lambda)'_2 = (D\Lambda)_2, \quad (5.32)$$

$$(D\Lambda)'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ B(D\Lambda)_2 + \sqrt{2}(D\Lambda)_1 \right], \quad (5.33)$$

$$(D\Lambda)'_0 = \frac{1}{2}B^2(D\Lambda)_2 + B\sqrt{2}(D\Lambda)_1 + (D\Lambda)_0. \quad (5.34)$$

De acordo com as transformações acima, obtém-se que a derivada do escalar de curvatura  $\nabla_{AB}\Lambda$  é invariante sob rotações nulas com  $n^a$  invariante quando o único escalar não-nulo for  $(D\Lambda)_0$ . A transformação de  $(D\Lambda)_a$  sob uma rotação nula com  $k^a$  invariante e parâmetro  $C$ , dadas pelas eqs.(3.14), é dada por

$$(D\Lambda)'_0 = (D\Lambda)_0, \quad (5.35)$$

$$(D\Lambda)'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ C(D\Lambda)_0 + \sqrt{2}(D\Lambda)_1 \right], \quad (5.36)$$

$$(D\Lambda)'_2 = \frac{1}{2}C^2(D\Lambda)_0 + C\sqrt{2}(D\Lambda)_1 + (D\Lambda)_2. \quad (5.37)$$

De acordo com as transformações acima, obtém-se que a derivada do escalar de curvatura  $\nabla_{AB}\Lambda$  é invariante sob rotações nulas com  $k^a$  invariante quando o único escalar não-nulo for  $(D\Lambda)_2$ .

Finalmente é determinada a derivada totalmente simetrizada do espinor de Ricci  $\Phi_{ABCD}$ . Os componentes de  $\nabla_{(AB}\Phi_{CDEF)}$  podem ser obtidos a partir dos escalares (sob transformações de coordenadas)  $(D\Phi)_X$  ( $X = 0, 1, \dots, 6$ ), definidos de acordo com

$$(D\Phi)_0 = \nabla_{(00}\Phi_{0000)} = \frac{1}{2}k^a k^b k^c \nabla_{(a} S_{bc)}, \quad (5.38)$$

$$(D\Phi)_1 = \nabla_{(00}\Phi_{0001)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}k^a k^b m^c \nabla_{(a} S_{bc)}, \quad (5.39)$$

$$(D\Phi)_2 = \nabla_{(00}\Phi_{0011)} = \frac{1}{2}k^a k^b n^c \nabla_{(a} S_{bc)}, \quad (5.40)$$

$$(D\Phi)_3 = \nabla_{(00}\Phi_{0111)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}k^a m^b n^c \nabla_{(a} S_{bc)}, \quad (5.41)$$

$$(D\Phi)_4 = \nabla_{(00}\Phi_{1111)} = \frac{1}{2}k^a n^b n^c \nabla_{(a} S_{bc)}, \quad (5.42)$$

$$(D\Phi)_5 = \nabla_{(01}\Phi_{1111)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}m^a n^b n^c \nabla_{(a} S_{bc)}, \quad (5.43)$$

$$(D\Phi)_6 = \nabla_{(11}\Phi_{1111)} = \frac{1}{2}n^a n^b n^c \nabla_{(a} S_{bc)}, \quad (5.44)$$

onde  $\nabla_{(a} S_{bc)}$  é a derivada covariante totalmente simetrizada de  $S_{ab}$ . A seguir serão apresentadas as transformações de  $(D\Phi)_X$  sob “boosts” e rotações nulas. Realizando um

“boost” com parâmetro  $A$ , dado pelas eqs.(3.11), obtém-se

$$(D\Phi)'_0 = A^3(D\Phi)_0, \quad (5.45)$$

$$(D\Phi)'_1 = A^2(D\Phi)_1, \quad (5.46)$$

$$(D\Phi)'_2 = A(D\Phi)_2, \quad (5.47)$$

$$(D\Phi)'_3 = (D\Phi)_3, \quad (5.48)$$

$$(D\Phi)'_4 = \frac{1}{A}(D\Phi)_4, \quad (5.49)$$

$$(D\Phi)'_5 = \frac{1}{A^2}(D\Phi)_5, \quad (5.50)$$

$$(D\Phi)'_6 = \frac{1}{A^3}(D\Phi)_6. \quad (5.51)$$

De acordo com as transformações acima, obtém-se que a derivada totalmente simetrizada do espinor de Ricci  $\nabla_{(AB}\Phi_{CDEF)}$  é invariante sob “boosts” quando o único escalar não-nulo for  $(D\Phi)_3$ . A transformação de  $(D\Phi)_X$  sob uma rotação nula com  $n^a$  invariante e parâmetro  $B$ , dada pelas eqs.(3.12), é dada por

$$(D\Phi)'_6 = (D\Phi)_6, \quad (5.52)$$

$$(D\Phi)'_5 = \frac{\sqrt{2}}{2}B(D\Phi)_6 + (D\Phi)_5, \quad (5.53)$$

$$(D\Phi)'_4 = \frac{1}{2}B^2(D\Phi)_6 + \sqrt{2}B(D\Phi)_5 + (D\Phi)_4, \quad (5.54)$$

$$(D\Phi)'_3 = \frac{\sqrt{2}}{4}B^3(D\Phi)_6 + \frac{3}{2}B^2(D\Phi)_5 + \frac{3\sqrt{2}}{2}B(D\Phi)_4 + (D\Phi)_3, \quad (5.55)$$

$$(D\Phi)'_2 = \frac{1}{4}B^4(D\Phi)_6 + \sqrt{2}B^3(D\Phi)_5 + 2B^2(D\Phi)_4 + 2\sqrt{2}B(D\Phi)_3 + (D\Phi)_2, \quad (5.56)$$

$$(D\Phi)'_1 = \frac{\sqrt{2}}{8}B^5(D\Phi)_6 + \frac{5}{4}B^4(D\Phi)_5 + \frac{5\sqrt{2}}{2}B^3(D\Phi)_4 + 5B^2(D\Phi)_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}B(D\Phi)_2 + (D\Phi)_1, \quad (5.57)$$

$$(D\Phi)'_0 = \frac{1}{8}B^6(D\Phi)_6 + \frac{3\sqrt{2}}{4}B^5(D\Phi)_5 + \frac{15}{4}B^4(D\Phi)_4 + 5\sqrt{2}B^3(D\Phi)_3 + \frac{15}{2}B^2(D\Phi)_2 + 3\sqrt{2}B(D\Phi)_1 + (D\Phi)_0. \quad (5.58)$$

De acordo com as transformações acima, obtém-se que a derivada totalmente simetrizada do espinor de Ricci  $\nabla_{(AB}\Phi_{CDEF)}$  é invariante sob rotações nulas com  $n^a$  invariante quando o único escalar não-nulo for  $(D\Phi)_0$ . A transformação de  $(D\Phi)_Z$  sob um rotação nula com

$k^a$  invariante e parâmetro  $C$ , dada pelas eqs.(3.14), é dada por

$$(D\Phi)'_0 = (D\Phi)_0 \quad (5.59)$$

$$(D\Phi)'_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}C(D\Phi)_0 + (D\Phi)_1, \quad (5.60)$$

$$(D\Phi)'_2 = \frac{1}{2}C^2(D\Phi)_0 + \sqrt{2}C(D\Phi)_1 + (D\Phi)_2, \quad (5.61)$$

$$(D\Phi)'_3 = \frac{\sqrt{2}}{4}C^3(D\Phi)_0 + \frac{3}{2}C^2(D\Phi)_1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}C(D\Phi)_2 + (D\Phi)_3, \quad (5.62)$$

$$(D\Phi)'_4 = \frac{1}{4}C^4(D\Phi)_0 + \sqrt{2}C^3(D\Phi)_1 + 3C^2(D\Phi)_2 + 2\sqrt{2}C(D\Phi)_3 + (D\Phi)_4, \quad (5.63)$$

$$(D\Phi)'_5 = \frac{\sqrt{2}}{2}C^5(D\Phi)_0 + \frac{5\sqrt{2}}{8}C^4(D\Phi)_1 + \frac{5\sqrt{2}}{2}C^3(D\Phi)_2 + 5C^2(D\Phi)_3 \\ + \frac{5\sqrt{2}}{2}C(D\Phi)_4 + (D\Phi)_5, \quad (5.64)$$

$$(D\Phi)'_6 = \frac{1}{8}C^6(D\Phi)_0 + \frac{3\sqrt{2}}{4}C^5(D\Phi)_1 + \frac{15}{4}C^4(D\Phi)_2 + 5\sqrt{2}C^3(D\Phi)_3 \\ + \frac{15}{2}C^2(D\Phi)_4 + 3\sqrt{2}C(D\Phi)_5 + (D\Phi)_6. \quad (5.65)$$

De acordo com as transformações acima, obtém-se que a derivada totalmente simetrizada do espinor de Ricci  $\nabla_{(AB}\Phi_{CDEF)}$  é invariante sob rotações nulas com  $k^a$  invariante quando o único escalar não-nulo for  $(D\Phi)_6$ .

## 5.2 Classificação de Karlhede

Nessa seção serão apresentadas algumas etapas úteis para a realização dos cálculos necessários para obter a classificação de Karlhede de espaços-tempos em (2+1)D para as derivadas de ordem  $q = 0$  e ordem  $q = 1$

Inicialmente, na primeira etapa, a métrica do espaço-tempo em (2+1)D deve ser dada em relação a um triáda nula  $\{k^a, n^a, m^a\}$ , usando o comando *makeg* do *GRTensorII*, necessária para o cálculo dos escalares (sob transformações de coordenadas) que correspondem aos componentes dos espinores do conjunto mínimo de invariantes de Cartan. Calcula-se o tensor de Ricci  $R_{ab}$  e o escalar de curvatura  $R$ , a partir dos quais são calculados os escalares  $\Phi_X$  e  $\Lambda$ , definidos com o comando *grdef* do *GRTensorII*. Isto corresponde ao passo 1 do algoritmo de Karlhede, para  $q = 0$ , isto é, as derivadas covariantes da curvatura de ordem zero.

A segunda etapa trata da classificação de Segre do espinor de Ricci sem traço  $S_{ab}$ , necessária para a determinação do referencial canônico e do subgrupo de isotropia  $H_0$ , que fazem parte dos passos 2 e 3 do algoritmo de Karlhede, para  $q = 0$ . Inicialmente é feita uma verificação para saber se  $S^a_b$  já está em uma das formas canônicas dos tipos

de Segre. Se isso ocorrer, não é necessário realizar a classificação de Segre e o referencial utilizado é um referencial canônico. Caso contrário, é preciso fazer a classificação Segre, o que pode ser feito utilizando o comando *jordan* (do pacote *linalg* do *Maple*) que determina não só a matriz canônica de Jordan de  $S^a_b$ , mas também a matriz de transformação para a base canônica. Uma outra maneira consiste em realizar transformações de Lorentz de  $\Phi_X$  e escolhendo os parâmetros de modo a obter uma das formas canônicas dos tipos de Segre.

Quando  $S_{ab}$  não estiver em uma das formas canônicas dos tipos de Segre, é necessário fazer uma transformação da tríada nula inicial para o referencial canônico, utilizando a matriz de transformação obtida com o comando *jordan*. A métrica deve ser definida novamente, agora em relação à tríada nula que constitui o referencial canônico, utilizando o comando *makeg*, com isto, todas as etapas também devem ser repetidas.

Na terceira etapa, determina-se o número  $t_0$  de funções funcionalmente independentes das coordenadas do espaço-tempo nos elementos do conjunto  $I_0$ , isto é, nos elementos  $\Lambda$  e  $\Phi_X$  do conjunto mínimo, dados no referencial canônico. Esta informação pode ser obtida calculando-se o posto da matriz Jacobiana dos elementos de  $I_0$ , utilizando o pacote *linalg* do *Maple*. Esta etapa corresponde ao passo 4 do algoritmo de Karlhede, para a ordem  $q = 0$  das derivadas covariantes da curvatura.

A quarta etapa envolve o cálculo dos elementos do conjunto  $I_1$ . Para completar  $I_1$ , de acordo com o conjunto mínimo, falta definir a derivada do escalar de curvatura  $\nabla_a R$ , o tensor de Cotton-York  $C_{ab}$  e a derivada covariante totalmente simetrizada  $\nabla_{(a} S_{bc)}$ , utilizando o comando *grdef*. A partir desses tensores são definidos os escalares  $\Psi_X$ ,  $(D\Lambda)_a$  e  $(D\Phi)_X$ , dados na seção anterior. Estes cálculos correspondem ao passo 1 do algoritmo de Karlhede, para  $q = 1$ .

Na quinta etapa é feita a classificação de Segre do tensor de Cotton-York  $C_{ab}$ , de maneira análoga ao tensor de Ricci sem traço  $S_{ab}$ . Assim, obtém-se o tipo de Segre de  $C_{ab}$  e seu grupo de isotropia. Em seguida determina-se os subgrupos de isotropia de  $(D\Lambda)_a$  e de  $(D\Phi)_X$ , utilizando as transformações de Lorentz definidas na seção anterior, implementadas no *GRTensorII*. A partir desses resultados, obtém-se o subgrupo de isotropia  $H_1$ , dado pela interseção dos subgrupos de isotropia de  $\Psi_X$ ,  $(D\Lambda)_a$  e  $(D\Phi)_X$ . Estes cálculos constituem os passos 2 e 3 do algoritmo de Karlhede, para  $q = 1$ .

A sexta etapa consiste na determinação do número  $t_1$  de funções funcionalmente independentes nos elementos do conjunto  $I_1$ , isto é, em  $\Lambda$ ,  $\Phi_X$ ,  $\Psi_X$ ,  $(D\Lambda)_a$  e  $(D\Lambda)_X$ , de acordo com o conjunto mínimo. Esta informação é obtida da mesma forma que o número  $t_0$  foi obtido na terceira etapa. Esta etapa corresponde ao passo 4 do algoritmo de Karlhede, para  $q = 1$ .

A última etapa consiste em fazer a comparação dos grupos de isotropia  $H_0$  e  $H_1$  e dos números de funções funcionalmente independentes  $t_0$  e  $t_1$ . Em caso de igualdade,

o resultado é a classificação de Karlhede do espaço-tempo. Em caso contrário, tem-se apenas os elementos da classificação até a ordem  $q = 1$ , faltando determinar os de ordens superiores

Neste trabalho foi feita a implementação apenas para as derivadas de ordens  $q = 0$  e  $q = 1$  do algoritmo de Karlhede. No próximo capítulo é feita uma aplicação das técnicas do problema da equivalência para espaços-tempos em  $(2+1)D$  para investigar espaços-tempos tipo-Gödel em  $(2+1)D$ .

---

---

# CAPÍTULO 6

---

## ESPAÇOS-TEMPOS HOMOGENEOS TIPO-GÖDEL EM (2+1)D

Neste capítulo, as técnicas do problema da equivalência de espaços-tempos em (2+1)D serão utilizadas para investigar o problema da homogeneidade dos espaços-tempos tipo-Gödel em (2+1)D. A equivalência desses espaços-tempos também é discutida e os resultados obtidos são comparados com os resultados existentes para espaços-tempos tipo-Gödel em (3+1)D [1].

A solução de Gödel [35] para as equações de campo de Einstein, foi o primeiro modelo cosmológico com matéria em rotação e curvas tipo-tempo fechadas. O modelo de Gödel mostrou que a Relatividade Geral admite espaços-tempos com patologias causais. Entretanto, as geodésicas tipo-tempo e nulas não são curvas fechadas. O modelo é geodesicamente completo e não tem singularidades, nem horizontes [36]. Devido a estas peculiaridades, as soluções tipo-Gödel vem sendo investigadas com grande interesse até hoje.

### 6.1 Espaços-tempos tipo-Gödel Homogêneos em (3+1)D

O espaço-tempo em (3+1)D com métrica de Gödel tem um estrutura de um produto direto  $ds^2_{(4)} = ds^2_{(3)} + dz^2$ , onde a métrica em (2+1)D  $ds^2_{(3)}$  é um caso particular do elemento de linha tipo-Gödel, definido por

$$ds^2_{(3)} = -[dt + H(r)d\phi]^2 + D^2(r)d\phi^2 + dr^2. \quad (6.1)$$

Sabe-se que todos os espaços-tempos em (3+1)D com métrica tipo-Gödel, que são homogêneos no espaço e no tempo (homogêneos ET), estão caracterizados por dois parâmetros  $m^2$  e  $\omega$ , onde

$$(i) \quad H = \omega r^2, \quad D = r, \quad \text{quando } m = 0;$$

$$(ii) \quad H = \frac{2\omega}{\mu^2}[1 - \cos(\mu r)], \quad D = \frac{1}{\mu} \sin(\mu r), \quad \text{quando } m^2 = -\mu^2 < 0;$$

$$(iii) \quad H = \frac{4\omega}{m^2} \sinh^2 \frac{mr}{2}, \quad D = \frac{1}{m} \sinh(mr), \quad \text{quando } m^2 \geq 0,$$

sendo a constante  $\omega$  a vorticidade destes espaços-tempos em rotação [37]. O espaço-tempo de Gödel é um caso particular da terceira classe, onde  $m^2 = 2\omega^2$ , com o tensor momento-energia dado por

$$T_{\mu\nu} = \rho v_\mu v_\nu, \quad v^\alpha = \delta^\alpha_0, \quad (6.2)$$

$$\kappa\rho = -2\Lambda = m^2 = 2\omega^2, \quad (6.3)$$

onde  $\kappa$  e  $\Lambda$  são, respectivamente, a constante gravitacional de Einstein e a constante cosmológica,  $\rho$  e  $v^\alpha$  são, respectivamente, a densidade e a quadri-velocidade do fluido. No modelo de Gödel em (3+1)D o grupo de isometria tem 5 parâmetros e o subgrupo de isotropia tem um parâmetro.

O elemento de linha tipo-Gödel dado pela eq.(6.1), além de ser uma solução da teoria do Einstein-Maxwell-Chern-Symon, também satisfaz as equações de Einstein para todos os valores de  $(m^2, \omega)$  e tem um grupo de isometria com 4 parâmetros [38].

A violação da causalidade global em espaços-tempos tipo-Gödel homogêneos ET depende do comportamento de  $g_{\phi\phi} = D^2(r) - H^2(r)$ , uma vez que os círculos definidos por  $t, r, z = \text{const}$  são curvas tipo-tempo fechadas quando  $g_{\phi\phi} < 0$  para um determinado conjunto de valores de  $r$ . As características da causalidade global são as seguintes [39]: (a) para  $m^2 < 0$ , temos uma seqüência infinita se alternando entre região causal e não-causal; (b) para  $0 \leq m^2 < 4\omega^2$ , temos apenas uma região causal; para  $m^2 \geq 4\omega^2$ , não existe problema de causalidade. O modelo de Rebouças-Tiommo [40], onde  $m^2 = 4\omega^2$ , é conformalmente plano, seu grupo de isometria tem 7 parâmetros e não tem estabilidade causal. Todos os modelos para  $m^2 > 4\omega^2$  têm estabilidade causal. Assim, o modelo de Rebouças-Tiommo é o limite entre os modelos causais e não-causais.

O problema da homogeneidade ET em espaços-tempos em (3+1)D com uma métrica tipo-Gödel foi investigado a partir de hipóteses restritivas impostas aos campos de vetores de Killing [40, 41, 37]. O resultado obtido foi um conjunto de condições necessárias e suficientes que foram reobtidas sem nenhuma hipótese simplificadora, usando as técnicas do problema da equivalência [11]. Embora a investigação da causalidade global de espaços-tempos tipo-Gödel em (2+1)D possa ser realizada seguindo as abordagens utilizadas para

(3+1)D, o mesmo não ocorre com o problema da homogeneidade ET. Isto acontece porque as técnicas do problema da equivalência em (2+1)D não são um caso particular dos resultados correspondentes em (3+1)D, de acordo com os resultados obtidos nos capítulos anteriores.

Na próxima seção as técnicas do problema da equivalência em (2+1)D, desenvolvidas nos capítulos anteriores, serão utilizadas para investigar o problema da homogeneidade ET de espaços-tempos tipo-Gödel em (2+1)D.

## 6.2 Espaços-tempos tipo-Gödel Homogêneos em (2+1)D

Nessa seção as condições necessárias e suficientes para homogeneidade ET de espaços-tempos tipo-Gödel em (2+1)D serão obtidas utilizando as técnicas do problema da equivalência em (2+1)D. Considere um espaço-tempo cujo elemento de linha é dado pela eq.(6.1). Para funções arbitrárias  $H(r)$  e  $D(r)$ , o tensor de Ricci é Segre tipo [11,1] e o referencial canônica está completamente fixado. O referencial canônico é obtido da maneira apresentada a seguir. Primeiro, os escalares  $\Phi_X$  (espinor de Ricci) são calculados em relação à tríada nula  $\theta^a$  ( $a = 1, 2, 3$ ) dada por

$$\theta^1 = \omega^1, \quad \theta^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega^3 - \omega^2), \quad \theta^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega^3 + \omega^2), \quad (6.4)$$

onde  $\omega^a$  é uma tríada de Lorentz, com  $\eta_{ab} = \text{diag}(+1, +1, -1)$ , dada por

$$\omega^1 = dr, \quad \omega^2 = D(r)d\phi, \quad \omega^3 = dt + H(r)d\phi. \quad (6.5)$$

Como os componentes não-nulos obtidos são  $\Phi_0, \Phi_2$  e  $\Phi_4$ , o referencial dado pelas eqs.(6.4) não é canônico. A fim de transformar  $\Phi_X$  na forma canônica para o tipo de Segre [11,1], onde  $\Phi_0 = \Phi_4$ , é realizado um “boost” com o parâmetro  $A(r)$  para uma nova tríada nula  $\tilde{\theta}^a$  dada por

$$\tilde{\theta}^1 = \theta^1, \quad \tilde{\theta}^2 = \sqrt{A(r)}\theta^2, \quad \tilde{\theta}^3 = \frac{\theta^3}{\sqrt{A(r)}}. \quad (6.6)$$

O referencial canônico para o tipo de Segre [11,1] é obtido escolhendo

$$A(r)^2 = \frac{\frac{D''}{D} - \left(\frac{H'}{D}\right)^2 + \left(\frac{H'}{D}\right)'}{\frac{D''}{D} - \left(\frac{H'}{D}\right)^2 - \left(\frac{H'}{D}\right)'}, \quad (6.7)$$

onde o símbolo (') denota a derivada em relação a  $r$ .

Usando o referencial canônico obtido, no passo 1 do algoritmo de Karlhede para a

derivada de ordem  $q = 0$ , obtém-se os seguintes invariantes de Cartan não-nulos

$$\Phi_0 = \Phi_4 = -\frac{A(r)}{4} \left[ \frac{D''}{D} - \left( \frac{H'}{D} \right)^2 - \left( \frac{H'}{D} \right)' \right], \quad (6.8)$$

$$\Phi_2 = -\frac{1}{12} \left[ \frac{D''}{D} - \left( \frac{H'}{D} \right)^2 \right], \quad (6.9)$$

$$\Lambda = -2 \left[ \frac{D''}{D} - \frac{1}{4} \left( \frac{H'}{D} \right)^2 \right]. \quad (6.10)$$

Em um espaço-tempo homogêneo ET com dimensão  $n$  a órbita do grupo de isometria tem dimensão  $d = n$ . Portanto, de acordo com a eq.(2.27) tem-se  $t_p = 0$ . Isto é, o número de funções funcionalmente independentes das coordenadas do espaço-tempo no conjunto  $I_p$  deve ser zero. Conseqüentemente, todas as quantidades do conjunto mínimo dadas a cima devem ser constantes. Assim, a partir das eqs.(6.8)–(6.10) pode-se facilmente concluir que, para um espaço-tempo em (2+1)D com métrica tipo-Gödel ser homogêneo ET, é necessário que

$$\frac{H'}{D} = \text{const} \equiv 2\omega, \quad \frac{D''}{D} = \text{const} \equiv m^2. \quad (6.11)$$

Agora é preciso mostrar que as condições necessárias acima também são suficientes para a homogeneidade ET. Utilizando, as condições dadas pelas eqs.(6.11) obtém-se que  $A(r) = 1$  e que os invariantes de Cartan no primeiro passo do algoritmo de Karlhede, para  $q = 0$ , reduzem-se a

$$\Phi_0 = \Phi_4 = 3\Phi_2 = \frac{1}{4}(4\omega^2 - m^2), \quad (6.12)$$

$$\Lambda = 2(\omega^2 - m^2), \quad (6.13)$$

onde obtém-se a forma canônica  $\Phi_0 = \Phi_4 = 3\Phi_2$  para o tipo de Segre [(11),1]. Estes resultados permitem agrupar os espaços-tempos em (2+1)D tipo-Gödel de acordo com os parâmetros  $m^2$  e  $\omega$ , em três classes:

- (i)  $m^2 \neq 4\omega^2$ , onde  $m^2, \omega \neq 0$ ;
- (ii)  $m^2 = 4\omega^2$ , onde  $\omega \neq 0$ ;
- (iii)  $m^2 \neq 0, \omega = 0$ .

Agora é necessário prosseguir com os passos seguintes do algoritmo de Karlhede para testar a equivalência, para cada classe de espaços-tempos em (2+1)D tipo-Gödel.

Para a primeira classe, encontra-se que os tipos de Segre é [(11),1] para todas as métricas. Seguido o algoritmo, é necessário encontrar o grupo de isotropia que deixa os

invariantes de Cartan inalterados. O escalar de curvatura  $\Lambda$  é invariante sob o grupo completo de Lorentz  $SO(2, 1)$ . Assim, o subgrupo de isotropia  $H_0$  é determinado pelo espinor de Ricci, cujo tipo de Segre é  $[(11), 1]$  e é invariante sob o grupo  $SO(2)$  de rotações espaciais. Portanto, obtém-se que  $t_0 = 0$  e que o grupo de isotropia  $H_0$  é unidimensional.

Prosseguindo com os passos do algoritmo, é necessário calcular o espinor de Cotton-York e as derivadas covariantes totalmente simetrizadas dos invariantes de de Cartan dados pelas eqs.(6.12)–(6.13), isto é, o primeiro passo para as derivadas de ordem  $q = 1$ . As seguintes quantidades são obtidas:

$$\Psi_0 = \Psi_4 = 3\Psi_2 = \frac{3}{2}\omega(4\omega^2 - m^2), \quad (6.14)$$

$$\nabla_{(AB}\Phi_{CDEF)} = 0, \quad (6.15)$$

$$\nabla_{AB}\Lambda = 0, \quad (6.16)$$

onde o espinor de Cotton-York  $\Psi_X$  está na forma canônica do tipo de Segre  $[(11), 1]$ .

Como nenhuma função funcionalmente independente surgiu,  $t_0 = t_1$ . Paralelamente, os invariantes de Cartan permanecem inalterados sob o mesmo grupo de isotropia (rotações espaciais), isto é,  $H_0 = H_1$ , e o algoritmo pára. Assim, obtém-se  $t_p = 0$  e o subgrupo de isotropia  $H_p = SO(2)$  unidimensional. A partir da eq.(2.25) e da eq.(2.27) do capítulo 2, obtém-se que o grupo de isometria tem dimensão 4 com órbita de dimensão 3. Portanto, as condições necessárias dadas pela eq.(6.11) também são suficientes para homogeneidade ET.

Para a próxima classe ( $m^2 = 4\omega^2, \omega \neq 0$ ), seguindo o algoritmo, obtém-se

$$\Phi_X = 0, \quad (6.17)$$

$$\Lambda = -\frac{3}{2}m^2. \quad (6.18)$$

Assim,  $t_0 = 0$  e  $\dim(H_0) = 3$ , uma vez que o grupo de isotropia dos invariantes  $\Phi_X$  é agora o grupo de Lorentz  $SO(2, 1)$ . Considerando que o espinor de Cotton-York é  $\Psi_X = 0$  e que todas as derivadas dos invariantes de Cartan são identicamente nulas, o processo termina. Este é o espaço-tempo anti-de-Sitter em (2+1)D, que é conformalmente plano e tem um grupo de isometria de dimensão 6, com um subgrupo de isotropia de dimensão 3. Como sua órbita de dimensão 3, de acordo com eq.(2.27), é também homogêneo ET. Note que o espaço-tempo em (3+1)D com os mesmos valores de  $(m^2, \omega)$  é o espaço-tempo conformalmente plano de Rebouças-Tiomo, com um grupo de isometria com 7 parâmetros.

Finalmente, para a classe ( $m^2 \neq 0, \omega = 0$ ), isto é, espaços-tempos sem rotação,

obtém-se, no primeiro passo do algoritmo para  $q = 0$ , as seguintes quantidades não-nulas

$$\Phi_0 = \Phi_4 = 3\Phi_2 = -\frac{1}{4}m^2, \quad (6.19)$$

$$\Lambda = -2m^2, \quad (6.20)$$

onde  $\Phi_X$  está na forma canônica para o tipo de Segre [(11),1]. Então, encontra-se que  $t_0 = 0$  e que  $H_0$  é o grupo  $SO(2)$  de rotações espaciais.

Prosseguindo com o algoritmo, obtém-se uma vez mais que o espinor de Cotton-York é nulo e que todas as derivadas são identicamente nulas. Portanto, o algoritmo pára com  $t_p = 0$  e  $H_p = SO(2)$ . Como o grupo de isometria tem dimensão 4 e o subgrupo de isotropia tem dimensão 1, a órbita tem dimensão 3 e o espaço é homogêneo ET e conformalmente plano. Note que o espaço-tempo tipo-Gödel em (3+1)D com rotação nula não é conformalmente plano e tem um grupo de isometria com dimensão 6.

Os resultados novos obtidos nesta aplicação, usando as técnicas do problema da equivalência na investigação de espaços-tempos tipo-Gödel em (2+1)D, podem ser resumidos nos seguintes teoremas:

**Teorema 6.1** *As condições necessárias e suficientes para um espaço-tempo tipo-Gödel em (2+1)D, com métrica dada pela eq.(6.1), ser (localmente) homogêneo ET são dadas pelas eqs.(6.11).*

**Teorema 6.2** *Todos espaços-tempos tipo-Gödel em (2+1)D (localmente) homogêneos ET, admitem um grupo de isometria de dimensão 4 com o subgrupo de isotropia de dimensão 1 e são caracterizados por dois parâmetros independentes  $m^2$  e  $\omega$ : pares idênticos ( $m^2, \omega$ ) especificam espaços-tempos equivalentes (isométricos).*

Vale enfatizar que as eqs.(6.12)–(6.20) estão relacionadas com as equações correspondentes para espaços-tempos tipo-Gödel em (3+1)D (eqs.(3.12)–(3.15) em [11]). Portanto, os resultados aqui obtidos podem ser considerados como o análogo em (2+1)D dos resultados obtidos em [11]. Assim, por exemplo, os teoremas 1 e 2 acima estão relacionados com os teoremas correspondentes em [11] (teorema 1 e teorema 2 na página 891).

Para todo espaço-tempo homogêneo ET tipo-Gödel em (2+1)D o espinor de Ricci tem tipo de Segre [(11),1]. A única exceção é espaço-tempo anti-de-Sitter, obtido quando  $m^2 = 4\omega^2$ , cujo grupo de isometria tem dimensão 6. Esta é a única condição que leva a um grupo de isometria com dimensão maior do que quatro. O espinor de Cotton-York também tem o mesmo tipo de Segre [(11),1], exceto quando o espaço-tempo for anti-de-Sitter e quando o espaço-tempo for sem rotação ( $\omega = 0, m^2 \neq 0$ ), uma vez que ambos são conformalmente planos ( $\Psi_X = 0$ ).

As técnicas do problema da equivalência também foram usadas para investigar espaço-tempo tipo-Gödel em (4+1)D [42, 43] e também em (3+1)D com torção não-nula [44].

Concluindo, é importante enfatizar que nenhuma equação de campo foi utilizada na obtenção dos resultados deste capítulo, que são válidos para todos espaços-tempos tipo-Gödel em (2+1)D independentemente da teoria da gravitação considerada.

---

---

# CAPÍTULO 7

---

## CONCLUSÃO

Neste trabalho foi feita uma investigação completa sobre a equivalência local de campos gravitacionais em  $(2+1)$  Dimensões, nos seus aspectos teóricos e práticos.

No capítulo 2 foi apresentado a solução de Cartan para o problema da equivalência onde as condições necessárias e suficiente para a equivalência de variedades Rimanianas foram obtidas.

No capítulo 3 foi mostrado um procedimento prático para testar a equivalência através do algoritmo desenvolvido por Karlhede. Neste capítulo foi mostrado também como proceder para a implementação do algoritmo, e foi realizado os cálculos até a primeira ordem da derivada covariante da curvatura, ou seja, foi feita uma implementação para  $q = 0$  e  $q = 1$ , para cada um destes casos foi percorrido o algoritmo de Karlhede, com isso obteve-se o conjunto dos escalares de Cartan, posteriormente fez-se a classificação algébrica do espinor de Ricci e do espinor de Cotton-York. Deixando para trabalhos futuros a continuação desta implementação.

No capítulo 4 mostrou-se como obter um conjunto mínimo de invariantes, isso é útil para uma implantação do algoritmo para testar a equivalência em programas de computação algébrica.

No capítulo 5 foi apresentado algumas etapas úteis para a realização dos cálculos necessários para obter a classificação de Karlhede de espaços-tempos em  $(2+1)D$ , para as derivadas de ordem  $q = 0$  e ordem  $q = 1$ , em relação a uma tríada nula. Estes cálculos foram realizados utilizando comandos do pacote de computação algébrica *GRTensorII*.

No capítulo 6 foi investigado o problema da homogeneidade em espaços-tempos tipo Gödel em  $(2+1)D$ , com o uso das técnicas do problema da equivalência de espaços-tempos em  $(2+1)D$ . Foi obtido que para todo espaço-tempo homogêneo ET tipo-Gödel em  $(2+1)D$  o espinor de Ricci tem tipo de Segre  $[(11),1]$ . A única exceção é espaço-tempo

anti-de-Sitter, obtido quando  $m^2 = 4\omega^2$ , cujo grupo de isometria tem dimensão 6. Esta é a única condição que leva a um grupo de isometria com dimensão maior do que quatro. O espinor de Cotton-York também tem o mesmo tipo de Segre  $[(11),1]$ , exceto quando o espaço-tempo for anti-de-Sitter e quando o espaço-tempo for sem rotação ( $\omega = 0, m^2 \neq 0$ ), uma vez que ambos são conformalmente planos ( $\Psi_X = 0$ ).

É importante salientar que neste trabalho não foi possível completar toda a implementação da solução do problema da equivalência local de campos gravitacionais em (2+1) Dimensões, deixando desta forma para trabalhos futuros uma implementação completa para a solução do problema aqui estudado. Tendo uma implementação completa, poderá-se distinguir se dois espaços-tempos em (2+1)D são equivalentes ou não, tendo apenas suas respectivas métricas.

---

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Sousa, F. C., Fonseca, J. B., and Romero, C.: Equivalence of three-dimensional spacetimes. *Classical and Quantum Gravity* 25, 035007 (2008)
- [2] Frick, I.: SHEEP users guide. Tech. rep., Stockholm Univ. Royal Inst. Technol. Inst. Teor. Fys. (1977)
- [3] Åman, J. E.: Manual for classi-Classification Programs for Geometries in General Relativity (Third Provisional Edition). *University of Stockholm Report* (1987)
- [4] MacCallum, M. and Skea, J.: SHEEP: A computer algebra system for general relativity. *Algebraic Computing in General Relativity, Lecture Notes from the First Brazilian School on Computer Algebra 2* (1994)
- [5] Cartan, É.: Leçons sur la geometrie des espaces de Riemann (Gauthier-Villars, Paris). Tech. rep., Received 10/OCT/73 (1946)
- [6] Ehlers, J.: Christoffel's work on the equivalence problem for Riemannian spaces and its importance for modern field theories of physics. *EB Christoffel: The influence of his work on mathematics and the physical sciences* 526–542 (1981)
- [7] Karlhede, A.: A review of the geometrical equivalence of metrics in general relativity. *General Relativity and Gravitation* 12, 693–707 (1980)
- [8] Karlhede, A.: The equivalence problem. *General Relativity and Gravitation* 38, 1109–1114 (2006)
- [9] MacCallum, M. and Aman, J. E.: Algebraically independent nth derivatives of the Riemannian curvature spinor in a general spacetime. *Classical and quantum gravity* 3, 1133 (1986)

- [10] Musgrave, P., Pollney, D., and Lake, K.: GRTensorII: A package for general relativity. In *Proceedings of the 6th Canadian Conference in General Relativity and Relativistic Astrophysics* (1996)
- [11] Rebouças, M. J. and Áman, J. E.: Computer-aided study of a class of Riemannian space-times. *Journal of mathematical physics* 28, 888–892 (1987)
- [12] Torres del Castillo, G.: Spinors in three dimensions, III. *Rev Mexicana Fís* 40, 713–729 (1994)
- [13] Aliev, A. and Nutku, Y.: Spinor formulation of topologically massive gravity. *Classical and Quantum Gravity* 12, 2913 (1995)
- [14] Torres del Castillo, G. and Gómez-Ceballos, L.: Algebraic classification of the curvature of three-dimensional manifolds with indefinite metric. *Journal of Mathematical Physics* 44, 4374–4380 (2003)
- [15] Penrose, R. and Rindler, W.: *Spinors and space-time: Volume 1, Two-spinor calculus and relativistic fields*, vol. 1. Cambridge University Press (1984)
- [16] Penrose, R. and Rindler, W.: *Spinors and space-time: Volume 2, Spinor and twistor methods in space-time geometry*, vol. 2. Cambridge University Press (1984)
- [17] Kramer, D., Stephani, H., MacCallum, M., and Herlt, E.: Exact solutions of Einstein's field equations. *Berlin* (1980)
- [18] Christensen, S. M.: Second-and fourth-order invariants on curved manifolds with torsion. *Journal of Physics A: Mathematical and General* 13, 3001 (1980)
- [19] MacCallum, M.: Classifying metrics in theory and practice. *Unified Field Theories of 4 Dimensions* 352 (1983)
- [20] Koutras, A. and McIntosh, C.: A metric with no symmetries or invariants. *Classical and Quantum Gravity* 13, L47 (1996)
- [21] Coley, A., Hervik, S., and Pelavas, N.: On spacetimes with constant scalar invariants. *Classical and Quantum Gravity* 23, 3053 (2006)
- [22] Coley, A., Milson, R., Pravda, V., and Pravdová, A.: Vanishing scalar invariant spacetimes in higher dimensions. *Classical and Quantum Gravity* 21, 5519 (2004)
- [23] Kobayashi, N. K., S.: *Foundations of Differential Geometry* 1 (1963)
- [24] Stenberg, S.: *Lectures on Differential Geometry* (1964)

- [25] Spivak, M.: A comprehensive introduction to differential geometry, Publish or Perish. *Inc, Berkeley 2* (1979)
- [26] Fonseca-Neto, J. B.: *A Equivalência de Espaços-tempos nas Teorias da Gravitação com Torção Utilizando Computação Algébrica*. Ph.D. thesis, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas(CBPF), Rio de Janeiro, RJ (1997)
- [27] Karlhede, A.: A review of the equivalence problem. *University of Stockholm Report USIP 79-05* (1979)
- [28] MacCallum, M.: Algebraic computing in general relativity. In *Classical general relativity. Proceedings of the conference on classical (non-quantum) general relativity, City University, London, 21-22 December 1983* (1984)
- [29] Hall, G., Morgan, T., and Perjés, Z.: Three-dimensional space-times. *General relativity and gravitation* 19, 1137–1147 (1987)
- [30] Hall, G. and Capocci, M.: Classification and conformal symmetry in three-dimensional space-times. *Journal of Mathematical Physics* 40, 1466–1478 (1999)
- [31] Eisenhart, L.: *Riemannian geometry* 2nd ed (1949)
- [32] Garca, A., Hehl, F. W., Heinicke, C., and Macas, A.: *Classical and Quantum Gravity* 21, 1099 (2004)
- [33] Hall, G. and Negm, D.: Physical structure of the energy-momentum tensor in general relativity. *International journal of theoretical physics* 25, 405–423 (1986)
- [34] Santos, J., Rebouças, M., and Teixeira, A. d. F.: Classification of second order symmetric tensors in five-dimensional Kaluza–Klein-type theories. *Journal of Mathematical Physics* 36, 3074–3084 (1995)
- [35] Gödel, K.: *Rev Mod Phys* 21, 447 (1948)
- [36] Hawking, S. and Ellis, G.: *The large scale structure of space-time* isbn: 978-0-521-09906-6 (1974)
- [37] Teixeira, A., Rebouças, M., and Áman, J.: Isometries of homogeneous Gödel-type spacetimes. *Physical Review D* 32, 3309 (1985)
- [38] Banados, M., Barnich, G., Compere, G., and Gomberoff, A.: Three-dimensional origin of Gödel spacetimes and black holes. *Physical Review D* 73, 044006 (2006)
- [39] Calvao, M., Rebouças, M., Teixeira, A., and Silva Jr, W.: Notes on a class of homogeneous space-times. *Journal of mathematical physics* 29, 1127–1129 (1988)

- 
- [40] Rebouças, M. and Tiomno, J.: Homogeneity of Riemannian space-times of Gödel type. *Physical Review D* 28, 1251 (1983)
- [41] Raychaudhuri, A. and Thakurta, S. G.: Homogeneous space-times of the Gödel type. *Physical Review D* 22, 802 (1980)
- [42] Rebouças, M. and Teixeira, A.: Riemannian space-times of Gödel type in five dimensions. *Journal of Mathematical Physics* 39, 2180–2192 (1998)
- [43] Carrion, H., Rebouças, M., and Teixeira, A.: Gödel-type space-times in induced matter gravity theory. *Journal of Mathematical Physics* 40, 4011–4027 (1999)
- [44] Aman, J., Fonseca-Neto, J., MacCallum, M., and Rebouças, M.: Riemann-Cartan spacetimes of Gödel type. *Classical and Quantum Gravity* 15, 1089 (1998)

---

---

# APÊNDICE A

---

## ESPINORES EM (2+1)D

Neste apêndice é apresentado alguns conceitos básicos do formalismo dos espinores com dois componentes em espaços-tempos em (2+1)D. Maiores detalhes podem ser encontrados nas referências [12, 13, 14]. Este formalismo pode ser considerado o análogo para espaços-tempos em (2+1)D do formalismo de Newman-Penrose [15, 16, 17] com espinores complexos de dois componentes em um espaço-tempo em (3+1)D. Entretanto, em (2+1)D existe apenas espinores com um tipo de índice, pois as representações do grupo de Lorentz  $SO(2, 1)$  dadas pela transformação de spin  $S_{AB}$  e pela transformação  $S_{\dot{A}\dot{B}} = \overline{S_{AB}}$  complexo conjugada de  $S_{AB}$  não são independentes, ao contrário do que ocorre em (3+1)D. Existem dois formalismos de espinores com dois componentes em (2+1)D: O formalismo onde os espinores são complexos e as transformações de spin dadas pelos elementos do grupo  $SU(1, 1)$ ; O formalismo onde os espinores são reais e as transformações de spin dadas pelos elementos do grupo  $SL(2, R)$ . O grupo  $SU(1, 1)$  é isomorfo ao grupo  $SL(2, R)$ . Neste apêndice é apresentado apenas o formalismo dos espinores reais com dois componentes.

### A.1 Espinores Reais em (2+1)D

Um espinor real com um índice é denotado por  $\psi^A$  ou  $\psi_A$  e tem dois componentes reais, onde os índices com letra latinas maiúsculas podem ter os valores 0, 1. Estes índices podem ser levantados e abaixados pelo espinor  $\epsilon_{AB} = -\epsilon_{BA}$  ( $\epsilon_{01} = 1$ ), de acordo com

$$\psi_A = \psi^B \epsilon_{BA}, \quad \psi^A = \epsilon^{AB} \psi_B. \quad (\text{A.1})$$

O produto interno é definido por

$$\psi^A \phi_A = \epsilon^{AB} \psi_B \phi_A = -\psi_A \phi^A \quad (\text{A.2})$$

e o referencial de spin  $\{o^A, \iota^A\}$  é formado por dois espinores linearmente independentes, isto é, com produto interno  $o_A \iota^A \neq 0$ , sendo normalizado pela condição  $o_A \iota^A = 1$ .

Existe uma correspondência entre uma tríada nula de vetores reais  $\{k^a, n^a, m^a\}$  (ou uma tríada de Lorentz  $\{t^a, x^a, z^a\}$ ) no espaço-tempo em (2+1)D e uma base de spin  $\{o^A, \iota^A\}$  do espaço dos espinores, dada pelas quantidades reais e simétricas  $\sigma^a_{AB}$  de acordo com

$$\begin{aligned} k^a &= \frac{1}{\sqrt{2}}(t^a + z^a) = \sigma^a_{AB} o^A o^B = \sigma^a_{00}, \\ n^a &= \frac{1}{\sqrt{2}}(t^a - z^a) = \sigma^a_{AB} \iota^A \iota^B = \sigma^a_{11}, \\ m^a &= x^a = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma^a_{AB} (o^A \iota^B + o^B \iota^A) = \sqrt{2} \sigma^a_{01}, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

onde  $m^a = x^a$  e  $z^a$  são vetores tipo-espaço,  $t^a$  é tipo tempo,  $k^a$  e  $n^a$  são tipo-luz. Utilizando a forma matricial estas quantidades ficam dadas por

$$\sigma^a_{AB} = \begin{pmatrix} \sigma^a_{00} & \sigma^a_{01} \\ \sigma^a_{10} & \sigma^a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^a & \frac{m^a}{\sqrt{2}} \\ \frac{m^a}{\sqrt{2}} & n^a \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

e suas inversas são

$$\sigma_a^{AB} = \begin{pmatrix} \sigma_a^{00} & \sigma_a^{01} \\ \sigma_a^{10} & \sigma_a^{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_a & -\frac{m_a}{\sqrt{2}} \\ -\frac{m_a}{\sqrt{2}} & k_a \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

A correspondência entre o espaço dos espinores é o espaço-tempo também requer a correspondência entre os respectivos produtos internos. Assim, a métrica do espaço-tempo  $g_{ab}$  e a métrica  $g_{ABCD}$  do espaço dos espinores simétricos de segunda ordem estão relacionadas de acordo com

$$\begin{aligned} g_{ab} &= \sigma_a^{AB} \sigma_b^{CD} g_{ABCD} \\ &= -k_a n_b - k_b n_a + m_a m_b \\ &= -t_a t_b + z_a z_b + x_a x_b, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} g_{ABCD} &= \sigma^a_{AB} \sigma^b_{CD} g_{ab} \\ &= -\frac{1}{2}(\epsilon_{AC} \epsilon_{BD} + \epsilon_{AD} \epsilon_{BC}). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Agora é possível mostrar que a condição de normalização da base de spin  $o_A \iota^A = 1$

está relacionada com os produtos não-nulos dos vetores das tríadas acima dados por

$$k_a n^a = t_a t^a = -1, \quad m_a m^a = x_a x^a = z_a z^a = 1. \quad (\text{A.8})$$

Em geral para cada vetor  $v^a$ , em um referencial nulo dado pelas eqs. (A.3) acima, existe um espinor simétrico de segunda ordem  $\phi_{AB}$  de acordo com

$$v^a = \sigma^a_{AB} \phi^{AB}, \quad \phi^{AB} = -\sigma_a^{AB} v^a. \quad (\text{A.9})$$

Agora, levando em consideração eqs. (A.6)-(A.7), obtém-se que

$$v_a v^a = g_{ab} v^b v^a = g_{ABCD} \phi^{CD} \phi^{AB} = -\phi_{AB} \phi^{AB}. \quad (\text{A.10})$$

O espinor  $\epsilon_{AB}$  satisfaz a identidade

$$\epsilon_{[AB} \epsilon_{C]D} = \epsilon_{AB} \epsilon_{CD} + \epsilon_{BC} \epsilon_{AD} + \epsilon_{CA} \epsilon_{BD} = 0 \quad (\text{A.11})$$

que podem ser escritas na forma

$$\epsilon_{AB} \epsilon^{CD} = \delta_A^C \delta_B^D - \delta_B^C \delta_A^D. \quad (\text{A.12})$$

Esta última expressão tem uma importante aplicação, pois é utilizada para decompor a parte anti-simétrica de um espinor  $\phi_{CD}$  qualquer. Utilizando contração dada por  $\epsilon_{AB} \epsilon^{CD} \phi_{CD} = (\delta_A^C \delta_B^D - \delta_B^C \delta_A^D) \phi_{CD}$  e a regra para levantar índices obtém-se o seguinte resultado  $\epsilon_{AB} \phi_C^C = \phi_{AB} - \phi_{BA}$ , que pode ser expresso como

$$\phi_{[AB]} = \frac{1}{2} \epsilon_{AB} \phi_C^C. \quad (\text{A.13})$$

No caso em que  $\phi_{AB} = \psi_A \varphi_B$ , obtém-se  $\psi_A \varphi_B - \psi_B \varphi_A = \epsilon_{AB} \psi_C \varphi^C$ , de modo que  $\psi_A$  e  $\varphi_A$  são proporcionais (linearmente dependentes) se, e somente se, seu produto escalar é nulo. As identidades dadas pelas eqs. (A.12) e eqs. (A.13) acima serão usadas repetidamente para obter a decomposição de um espinor em partes irredutíveis.

A transformação de spin é dada por  $\psi'^A = S^A_B \psi^B$ , onde  $S^A_B$  é uma matriz real  $2 \times 2$  com determinante unitário, isto é, um elemento do grupo  $SL(2, R)$ . O produto interno e o espinor  $\epsilon_{AB}$  ficam invariantes, ou seja,  $\varphi'_A \psi'^A = \varphi_A \psi^A$  e  $\epsilon_{CD} = S^A_C S^B_D \epsilon'_{AB} = \epsilon'_{CD}$ . As transformações de Lorentz que correspondem as transformações de spin são dadas por

$$L^a_b = -\sigma^a_{AB} \sigma_b^{CD} S^A_C S^B_D. \quad (\text{A.14})$$

Pode-se notar que usando a matriz  $S^A_B$  ou a matriz  $-S^A_B$  obtém-se a mesma matriz  $L^a_b$ ,

isto é, existe um homomorfismo 2-1 entre o grupo  $SL(2, R)$  e o grupo restrito de Lorentz  $SO(2, 1)$ , onde as transformações de Lorentz são próprias ( $\det(L^a_b) = 1$ ) e ortócronas ( $L^0_0 \geq 1$ ).

## A.2 Derivada Covariante

Nesta seção, é utilizada a abordagem da referencia [12], onde  $\partial_a$  representa a derivada direcional em relação a  $e_a$  e  $\nabla_a$  a derivada covariante em relação a  $\partial_a$ . Os componentes da conexão de Levi-Civita  $\Gamma^c_{ba}$  relativos a base  $\{\partial_a \mid a = 0, 1, 2\}$  são definidas por

$$\nabla_a \partial_b = \Gamma^c_{ba} \partial_c, \quad (\text{A.15})$$

que são determinados por  $[\partial_a, \partial_b] = (\Gamma^c_{ba} - \Gamma^c_{ab}) \partial_c$ , tem-se ainda que  $\Gamma_{abc} = g_{ad} \Gamma^d_{bc}$  e  $\Gamma_{abc} = -\Gamma_{bac}$ . O espinor correspondente a  $\Gamma_{abc}$  é o espinor com componentes reais

$$\Gamma_{ABCDEF} = \Gamma_{ACEF} \epsilon_{BD} + \Gamma_{BDEF} \epsilon_{AC}, \quad (\text{A.16})$$

onde

$$\Gamma_{ABCD} = \frac{1}{2} \epsilon^{RS} \Gamma_{RASBCD} = \frac{1}{2} \Gamma^R_{ARBCD}. \quad (\text{A.17})$$

Os componentes de  $\Gamma_{ABCD}$  são simétricos no primeiro e no segundo par de índices, ou seja,  $\Gamma_{ABCD} = \Gamma_{BACD} = \Gamma_{ABDC}$ .

O espinor correspondente a  $\partial_a$  é o espinor com componentes reais  $\partial_{AB}$  definido por

$$\partial_{AB} = \sigma^a_{AB} \partial_a, \quad (\text{A.18})$$

com isso obtém-se a equação espinorial correspondente a eq.(A.15), que é dada por

$$\nabla_{AB} \partial_{CD} = \Gamma^R_{CAB} \partial_{RD} + \Gamma^R_{DAB} \partial_{CR}, \quad (\text{A.19})$$

onde  $\nabla_{AB}$  representa a derivada covariante em relação a  $\partial_{AB}$ . Os componentes da derivada covariante de um campo de espinores  $\psi_{FG\dots}^{CD\dots}$  em relação a  $\partial_{AB}$  são obtidos por

$$\begin{aligned} \nabla_{AB} \psi_{FG\dots}^{CD\dots} = & \partial_{AB} \psi_{FG\dots}^{CD\dots} + \Gamma^C_{RAB} \psi_{FG\dots}^{RD\dots} + \Gamma^D_{RAB} \psi_{FG\dots}^{CR\dots} \\ & + \dots - \Gamma^R_{FAB} \psi_{RG\dots}^{CD\dots} + \Gamma^R_{GAB} \psi_{FR\dots}^{CD\dots} - \dots \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Devido a simetria no primeiro par de índices de  $\Gamma_{ABCD}$ , obtém-se que a derivada covariante de  $\epsilon_{AB}$  é nula, desta forma, a derivada covariante comuta com o abaixamento e levantamento dos índices do espinor. Sob uma transformação de spin os componentes de

$\Gamma_{ABCD}$  se transformam de acordo com

$$\Gamma'_{ABCD} = S^T_C S^V_D (S^R_A S^K_B \Gamma_{RKT V} + S^M_A \partial_{TV} S_{MB}). \quad (\text{A.21})$$

### A.3 Espinor de Curvatura

Agora é analisado o espinor de curvatura e seus componentes, mas antes disso é importantes ver algumas relações, tais como

$$\epsilon_{AB} \epsilon^{CB} = \delta_A^C; \quad \epsilon_{AB} \epsilon^{AB} = \delta_A^A = 2, \quad (\text{A.22})$$

e

$$2\psi_{[AB]} = \psi_{AB} - \psi_{BA} = \epsilon_{AB} \psi_N^N = (\delta_A^C \delta_B^D - \delta_B^C \delta_A^D) \psi_{CD}, \quad (\text{A.23})$$

onde

$$\psi_N^N = \epsilon^{NB} \psi_{NB}; \quad \epsilon_{AB} \epsilon^{CD} = \delta_A^C \delta_B^D - \delta_B^C \delta_A^D. \quad (\text{A.24})$$

O espinor de curvatura é dado por

$$R_{AXBYCZDW} = \sigma^a_{AX} \sigma^b_{BY} \sigma^c_{CZ} \sigma^d_{DW} R_{abcd}, \quad (\text{A.25})$$

como já se sabe o tensor curvatura tem as seguintes simetrias

$$R_{abcd} = -R_{abdc} = -R_{bacd} = R_{cdab}, \quad (\text{A.26})$$

desta forma o espinor de curvatura terá as mesmas simetrias, ou seja,

$$R_{AXBYCZDW} = -R_{AXBYDW CZ} = -R_{BYAXCZDW} = R_{CZDWAXBY}, \quad (\text{A.27})$$

onde

$$R_{AXBYCZDW} = R_{(AX)(BY)(CZ)(DW)}, \quad (\text{A.28})$$

A análise do espinor de curvatura é dividida em duas partes, uma para os dois primeiros pares (AX) e (BY) e outra para os dois últimos pares (CZ) e (DW). Para os primeiros pares tem-se

$$\begin{aligned} \epsilon_{AB} \epsilon^{NK} R_{NXXKYCZDW} &= \epsilon_{AB} R_{NX}^N YCZDW \\ &= R_{AXBYCZDW} - R_{BXAYCZDW} \\ &= R_{ABXYCZDW} - R_{BAXYCZDW} \\ &= 2R_{[AB]XYCZDW}, \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

e

$$\begin{aligned}
\epsilon_{XY}\epsilon^{NV}R_{ANBVCZDW} &= \epsilon_{XY}R_{ANB}{}^N{}_{CZDW} \\
&= R_{AXBYCZDW} - R_{AYBXCZDW} \\
&= R_{AXBYCZDW} + R_{BXAYCZDW} \\
&= 2R_{(AB)XYCZDW}.
\end{aligned} \tag{A.30}$$

Como pode ser visto acima, o espinor de curvatura tem uma parte simétrica em “AB” e outra anti-simétrica em “AB”, com isso o espinor de curvatura pode ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{aligned}
R_{AXBYCZDW} &= R_{(AB)XYCZDW} + R_{[AB]XYCZDW} \\
&= \frac{1}{2}(\epsilon_{XY}R_{ANB}{}^N{}_{CZDW} + \epsilon_{AB}R_{NX}{}^N{}_{YCZDW}),
\end{aligned} \tag{A.31}$$

onde

$$\begin{aligned}
R_{NX}{}^N{}_{YCZDW} &= \epsilon^{NK}R_{NXKYCZDW} \\
&= \epsilon^{NK}R_{XNYKCZDW} \\
&= R_{XNY}{}^N{}_{CZDW}
\end{aligned} \tag{A.32}$$

e

$$\begin{aligned}
R_{NX}{}^N{}_{YCZDW} &= \epsilon^{NK}R_{NXKYCZDW} \\
&= -\epsilon^{NK}R_{KYNXCZDW} \\
&= \epsilon^{KN}R_{KYNXCZDW} \\
&= R_{KY}{}^K{}_{XCZDW},
\end{aligned} \tag{A.33}$$

isso mostra que  $R_{NX}{}^N{}_{YCZDW}$  é simétrico na ordem de contração e simétrico em “XY”, ou seja,

$$\begin{aligned}
R_{NX}{}^N{}_{YCZDW} &= R_{XNY}{}^N{}_{CZDW}, \\
R_{NX}{}^N{}_{YCZDW} &= R_{KY}{}^K{}_{XCZDW}.
\end{aligned} \tag{A.34}$$

Fazendo a seguinte definição

$$R_{ABCZDW} = \frac{1}{2}R_{ANB}{}^N{}_{CZDW} = R_{BACZDW}, \tag{A.35}$$

e usando a eq.(A.35) na eq.(A.31) obtém-se

$$R_{AXBYCZDW} = \epsilon_{AB}R_{XYCZDW}\epsilon_{XY}R_{ABCZDW}. \tag{A.36}$$

Analisando para os pares  $(CZ)$  e  $(DW)$  do espinor de curvatura, tem-se

$$\begin{aligned}
\epsilon_{CD}\epsilon^{NK}R_{ABCZDW} &= \epsilon_{CD}R_{ABNZ}{}^N{}_W \\
&= R_{ABCZDW} - R_{ABDZCW} \\
&= R_{ABCDZW} - R_{ABDCZW} \\
&= 2R_{AB[CD]ZW}
\end{aligned} \tag{A.37}$$

e

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ZW}\epsilon^{UV}R_{ABCUDV} &= \epsilon_{ZW}R_{ABCUD}{}^U \\
&= R_{ABCZDW} - R_{ABCWDZ} \\
&= R_{ABCDZW} + R_{ABDZCW} \\
&= 2R_{AB(CD)ZW},
\end{aligned} \tag{A.38}$$

assim como foi feito para chegar na eq.(A.34), o processo análogo é feito para se chegar a seguinte conclusão

$$\begin{aligned}
R_{ABNZ}{}^N{}_W &= R_{ABZ}{}^N{}_W \\
R_{ABNZ}{}^N{}_W &= R_{ABN}{}^N{}_Z.
\end{aligned} \tag{A.39}$$

Fazendo a seguinte definição

$$\begin{aligned}
Q_{ABCD} &= \frac{1}{2}R_{ABCND}{}^N \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}R_{ANB}{}^N{}_C{}_K{}_D{}^K\right) \\
&= \frac{1}{4}R_{AXB}{}^X{}_C{}_Z{}_D{}^Z \\
&= \frac{1}{4}\epsilon^{XY}\epsilon^{ZW}R_{AXBYCZDW},
\end{aligned} \tag{A.40}$$

é fácil ver que

$$Q_{ABCD} = Q_{(AB)(CD)} = Q_{CDAB}. \tag{A.41}$$

De posse destes elementos, pode-se escrever que

$$\begin{aligned}
R_{ABCZDW} &= R_{AB(CD)ZW} + R_{AB[CD]ZW} \\
&= \frac{1}{2}(\epsilon_{ZW}R_{ABCND}{}^N + \epsilon_{CD}R_{ABNZ}{}^N{}_W).
\end{aligned} \tag{A.42}$$

Usando a eq.(A.40) na eq.(A.42), obtém-se

$$R_{ABCZDW} = \epsilon_{ZW}Q_{ABCD} + \epsilon_{CD}Q_{ABZW}. \tag{A.43}$$

O espinor  $Q_{ABCD}$  pode ser decomposto de acordo com [15]

$$Q_{ABCD} = Q_{(ABCD)} + \frac{2}{3}Q_{A[BC]D} + \frac{2}{3}Q_{A[BD]C}. \quad (\text{A.44})$$

Usando as propriedades de baixar e subir índice em  $Q_{ABCD}$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \epsilon_{AC}\epsilon^{NK}Q_{ANKD} &= \epsilon_{BC}Q_{AN^N D} = \epsilon_{BC}Q_{AD} \\ &= Q_{ABCD} - Q_{ACBD} \\ &= 2Q_{A[BC]D}. \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

Definindo  $Q_{AD} = Q_{AN^N D}$ , obtém-se

$$Q_{A[BC]D} = \frac{1}{2}\epsilon_{BC}Q_{AN^N D} = \frac{1}{2}\epsilon_{BC}Q_{AD}, \quad (\text{A.46})$$

substituindo este resultado na eq.(A.44), obtém-se

$$Q_{ABCD} = Q_{(ABCD)} + \frac{1}{3}(\epsilon_{BC}Q_{AD} + \epsilon_{BD}Q_{AC}). \quad (\text{A.47})$$

Agora é analisado o elemento  $Q_{AD}$ , portanto, tem-se

$$\begin{aligned} Q_{AD} &= Q_{AN^N D} = \epsilon^{NK}Q_{ANKD} = \epsilon^{NK}Q_{KDAN} \\ &= \epsilon^{NK}Q_{DKNA} = -\epsilon^{KN}Q_{DKNA} \\ &= -Q_{DK^K A} = -Q_{DA}, \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

com isso ver-se que  $Q_{AD}$  é anti-simétrico, isto é,  $Q_{AD} = -Q_{DA}$ . Tem-se também o seguinte elemento

$$\epsilon_{AB}Q_{N^N} = Q_{AD} - Q_{DA} = 2Q_{[AD]}, \quad (\text{A.49})$$

com isso obtém-se que

$$Q_{AD} = \frac{1}{2}\epsilon_{AB}Q_{N^N} = \frac{1}{2}\epsilon_{AB}Q \quad \therefore \quad Q_{N^N} = Q, \quad (\text{A.50})$$

trabalhando mais um pouco com  $Q_{N^N}$ , obtém-se

$$\begin{aligned} Q_{N^N} &= \epsilon^{NK}Q_{NK} = \epsilon^{AD}Q_{AD} = \epsilon^{AD}Q_{AN^N D} \\ &= \epsilon^{AD}\epsilon^{NK}Q_{ANKD} = \epsilon^{AD}\epsilon^{BC}Q_{ABCD} \\ &= \epsilon^{AD}\epsilon^{BC}Q_{ANKD} = Q_{AB}{}^{AB} \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

ou seja,  $Q_N^N = Q_{AB}{}^{AB}$ . Com estes resultados pode-se reescrever a eq.(A.44), como sendo

$$Q_{ABCD} = Q_{(ABCD)} + \frac{1}{6}(\epsilon_{BC}\epsilon_{AD} + \epsilon_{BD}\epsilon_{AC})Q. \quad (\text{A.52})$$

Substituindo a definição de  $g_{ABCD}$  na eq.(A.52), obtém-se

$$Q_{ABCD} = Q_{(ABCD)} - \frac{1}{3}g_{ABCD}Q, \quad (\text{A.53})$$

definindo

$$\Phi_{ABCD} = Q_{(ABCD)} \quad (\text{A.54})$$

e

$$Q = \Lambda. \quad (\text{A.55})$$

Substituindo estes resultados na eq.(A.53), obtém-se

$$Q_{ABCD} = \Phi_{ABCD} - \frac{1}{3}g_{ABCD}\Lambda. \quad (\text{A.56})$$

Finalmente, os resultados da decomposição do espinor de curvatura podem ser resumidos da seguinte maneira [12, 13, 14]

$$R_{AXBYCZDW} = \epsilon_{XY}R_{ABCZDW} + \epsilon_{AB}R_{XYCZDW}, \quad (\text{A.57})$$

$$R_{ABCZDW} = \epsilon_{ZW}Q_{ABCD} + \epsilon_{CD}Q_{ABZW}, \quad (\text{A.58})$$

$$Q_{ABCD} = \Phi_{ABCD} - \frac{1}{3}g_{ABCD}\Lambda. \quad (\text{A.59})$$

## A.4 Espinores de Ricci e de Cotton-York

Agora é analisado o espinor de Ricci, tem-se inicialmente que o tensor de Ricci é dado por

$$R_{bd} = R^a{}_{bad}. \quad (\text{A.60})$$

O espinor de Ricci pode ser obtido da seguinte forma

$$R_{BYDW} = \sigma^b{}_{BY}\sigma^d{}_{DW}R_{bd} \quad (\text{A.61})$$

$$R^{CZ}{}_{BYCZDW} = \sigma^{CZ}{}_a\sigma^b{}_{BY}\sigma^a{}_{CZ}\sigma^d{}_{DW}R^a{}_{bad}, \quad (\text{A.62})$$

desta forma tem-se que

$$\begin{aligned}
 R_{BYDW} &= R^{CZ}{}_{BYCZDW} = g^{AXCZ} R_{AXBYCZDW} \\
 &= -\frac{1}{2} (\epsilon^{AC} \epsilon^{XZ} + \epsilon^{AZ} \epsilon^{XC}) R_{AXBYCZDW} \\
 &= -\frac{1}{2} \epsilon^{AC} \epsilon^{XZ} R_{AXBYCZDW} - \frac{1}{2} \epsilon^{AZ} \epsilon^{XC} R_{AXBYCZDW} \\
 &= -\frac{1}{2} \epsilon^{AC} \epsilon^{XZ} R_{AXBYCZDW} - \frac{1}{2} \epsilon^{AC} \epsilon^{XZ} R_{AXBYZCDW} \\
 &= -\frac{1}{2} \epsilon^{AC} \epsilon^{XZ} (R_{AXBYCZDW} + R_{AXBYZCDW}),
 \end{aligned} \tag{A.63}$$

ou seja,

$$R_{BYDW} = R^{CZ}{}_{BYCZDW} = -\epsilon^{AC} \epsilon^{XZ} R_{AXBYCZDW}. \tag{A.64}$$

Substituindo a eq.(A.36) na eq.(A.64), obtém-se

$$\begin{aligned}
 R_{BYDW} &= -\epsilon^{AC} \epsilon^{XZ} (\epsilon_{AB} R_{XYCZDW} + \epsilon_{XY} R_{ABCZDW}) \\
 &= \epsilon^{CA} \epsilon_{BA} \epsilon^{XZ} R_{XYCZDW} + \epsilon^{XZ} \epsilon_{XY} \epsilon^{CA} R_{CBAZDW} \\
 &= \delta_B^C R^Z{}_{YCZDW} + \delta_Y^Z R^A{}_{BAZDW} \\
 &= R^Z{}_{YBZDW} + R^A{}_{BAYDW} \\
 &= R^N{}_{YBNDW} + R^N{}_{BNDW} \\
 &= (R^N{}_{YBNDW} + R^N{}_{BYNDW}) \\
 &= \epsilon^{NK} (R_{KYBNDW} + R_{KBYNDW}) \\
 &= \epsilon^{CA} (R_{AYBCDW} + R_{ABYCDW}) \\
 &= \epsilon^{CA} (R_{AYCBDW} + R_{ABCYDW}) \\
 &= \epsilon^{CA} (R_{ABCYDW} + R_{ABCYDW}) \\
 R_{BYDW} &= 2\epsilon^{CA} R_{ABCYDW}.
 \end{aligned} \tag{A.65}$$

Usando a eq.(A.43), é fácil ver que

$$\begin{aligned}
 \epsilon^{CA} R_{ABCYDW} &= \epsilon^{CA} (\epsilon_{CD} Q_{ABYW} + \epsilon_{YW} Q_{ABCD}) \\
 &= \delta_D^A Q_{ABYW} + \epsilon^{CA} \epsilon_{YW} Q_{ABCD} \\
 R^C{}_{BCYDW} &= Q_{DBYW} + \epsilon_{YW} Q^C{}_{BCD},
 \end{aligned} \tag{A.66}$$

e utilizando a eq.(A.52) obtém-se

$$\begin{aligned}
 Q^C{}_{BCD} &= \epsilon^{CA} \left[ Q_{(ABCD)} + \frac{1}{6} (\epsilon_{BD}\epsilon_{AC} + \epsilon_{BC}\epsilon_{AD}) Q \right] \\
 &= \frac{1}{6} (\epsilon^{CA}\epsilon_{AC}\epsilon_{BD} + \epsilon^{CA}\epsilon_{AD}\epsilon_{BC}) Q \\
 &= \frac{1}{6} (-2\epsilon_{BD} - \delta_D^C\epsilon_{BC}) Q \\
 Q^C{}_{BCD} &= -\frac{1}{2}\epsilon_{BD}Q = Q_{BD} = -Q_{DB}.
 \end{aligned} \tag{A.67}$$

Substituindo a eq.(A.67) na eq.(A.66), obtém-se

$$\begin{aligned}
 R^C{}_{BCYDW} &= Q_{DBYW} + \epsilon_{YW}Q_{BD} \\
 R^C{}_{YCBDW} &= Q_{YDBW} - \frac{1}{2}\epsilon_{BW}\epsilon_{YD}Q.
 \end{aligned} \tag{A.68}$$

O primeiro termo da eq.(A.68) é dado por

$$Q_{YDBW} = Q_{(YDBW)} - \frac{1}{3}g_{YDBW}Q. \tag{A.69}$$

Substituindo este resultado na eq.(A.68), obtém-se

$$\begin{aligned}
 R^C{}_{YCBDW} &= Q_{(YDBW)} - \frac{1}{3}g_{YDBW}Q - \frac{1}{2}\epsilon_{BW}\epsilon_{YD}Q \\
 R^C{}_{BCYDW} &= Q_{(YBDW)} - \frac{1}{3}g_{YBDW}Q + \frac{1}{2}g_{YBDW}Q \\
 R^C{}_{BCYDW} &= Q_{(YBDW)} + \frac{1}{6}g_{YBDW}Q.
 \end{aligned} \tag{A.70}$$

Pode-se ver nesta equação que  $R^C{}_{YCBDW}$  é simétrico em “ $YB$ ”. Substituindo a eq.(A.70) na eq.(A.65) e usando a definição  $\Phi_{ABCD} = Q_{(ABCD)}$  obtém-se a expressão para o espinor de Ricci, a qual é dada por

$$R_{BYDW} = 2\Phi_{BYDW} + \frac{1}{3}g_{BYDW}Q. \tag{A.71}$$

Agora falta encontrar quem é “ $Q$ ”, para isso tem-se

$$\begin{aligned}
R &= R^{BY}{}_{BY} = g^{BYDW} R_{BYDW} \\
&= 2g^{BYDW} \Phi_{BYDW} + \frac{1}{3} g^{BYDW} g_{BYDW} Q \\
&= \frac{1}{3} \left[ -\frac{1}{2} (\epsilon^{BD} \epsilon^{YW} + \epsilon^{BW} \epsilon^{YD}) g_{BYDW} Q \right] \\
&= \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2} (\epsilon^{DB} \epsilon_{BD} \epsilon^{YW} \epsilon_{YW} + \epsilon^{WB} \epsilon^{YD} g_{BYDW}) Q \right] \tag{A.72} \\
&= \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2} (4 + \delta_D^W \delta_W^D) Q \right] \\
&= \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2} (4 + 2) Q \right] \\
R &= Q,
\end{aligned}$$

como se ver “ $Q$ ” é o escalar de curvatura, desta forma pode-se reescrever a equação para o espinor de Ricci como sendo [12, 13, 14]

$$\begin{aligned}
R_{BYDW} &= 2\Phi_{BYDW} + \frac{1}{3} g_{BYDW} R, \\
R_{BYDW} &= S_{BYDW} + \frac{1}{3} g_{BYDW} R.
\end{aligned} \tag{A.73}$$

Já é sabido que o tensor de Ricci é dado por

$$R_{ab} = S_{ab} + \frac{1}{3} g_{ab} R, \tag{A.74}$$

onde  $S_{ab}$  é o tensor de Ricci sem traço. Comparando este resultado com a eq.(A.73), pode-se facilmente perceber que o espinor de Ricci sem traço é dado por

$$\begin{aligned}
S_{AXBY} &= 2\Phi_{AXBY}, \\
\Phi_{AXBY} &= \frac{1}{2} S_{AXBY}.
\end{aligned} \tag{A.75}$$

Procedendo de maneira semelhante com relação ao tensor de Cotton-York  $C_{ab}$ , obtém-se que o espinor de Cotton-York [14] é dado por

$$\Psi_{AXBY} = -\sqrt{2} \nabla^N{}_{(A} \Phi_{XBY)N}. \tag{A.76}$$

## A.5 Identidades de Ricci e de Bianchi

Agora são analisadas as identidades de Ricci e de Bianchi, respectivamente, no formalismo de espinores. Em primeiro lugar é analisado as identidades de Ricci. Esta

identidade é dada no formalismo de tensores, como sendo

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) v_c = -R^d{}_{cab} v_d, \quad (\text{A.77})$$

onde a derivada covariante não é simétrica, ou seja,

$$\nabla_a \nabla_b \neq \nabla_b \nabla_a. \quad (\text{A.78})$$

Na forma de espinores pode-se escrever a eq.(A.77) como sendo

$$(\nabla_{AX} \nabla_{BY} - \nabla_{BY} \nabla_{AX}) v_{CZ} = -R^{DW}{}_{CZAXBY} v_{DW}. \quad (\text{A.79})$$

Para continuar, é importante lembrar que

$$\epsilon_{AB} \epsilon^{XY} = \delta_A^X \delta_B^Y - \delta_B^X \delta_A^Y, \quad (\text{A.80})$$

com isso pode-se escrever que

$$\begin{aligned} \epsilon_{WX} \epsilon^{PQ} \nabla_{AP} \nabla_{BQ} &= \delta_W^P \delta_X^Q - \delta_X^P \delta_W^Q (\nabla_{AP} \nabla_{BQ}) \\ &= \delta_W^P \delta_X^Q \nabla_{AP} \nabla_{BQ} - \delta_X^P \delta_W^Q \nabla_{AP} \nabla_{BQ} \\ \epsilon_{WX} \epsilon^{PQ} \nabla_{AP} \nabla_{BQ} &= \nabla_{AW} \nabla_{BX} - \nabla_{AX} \nabla_{BW} = \epsilon_{WX} \nabla_{AP} \nabla_B^P. \end{aligned} \quad (\text{A.81})$$

Utilizando o mesmo processo pode-se encontrar facilmente que

$$\epsilon_{AB} \epsilon^{PQ} \nabla_{PW} \nabla_{QX} = \nabla_{AW} \nabla_{BX} - \nabla_{BW} \nabla_{AX} = \epsilon_{AB} \nabla_{PW} \nabla^P{}_X \quad (\text{A.82})$$

e ainda que

$$\begin{aligned} \nabla_{AW} \nabla_{BX} - \nabla_{BX} \nabla_{AW} &= \nabla_{AW} \nabla_{BX} - \nabla_{AX} \nabla_{BW} \\ &\quad + \nabla_{AW} \nabla_{BX} - \nabla_{AX} \nabla_{BW} \\ \nabla_{AW} \nabla_{BX} - \nabla_{BX} \nabla_{AW} &= \epsilon_{AB} \nabla_{NW} \nabla^N{}_X + \epsilon_{WX} \nabla_{AN} \nabla_B^N, \end{aligned} \quad (\text{A.83})$$

esta mesma equação pode ser expressada de outra maneira, ou seja,

$$\begin{aligned} \nabla_{AW} \nabla_{BX} - \nabla_{BX} \nabla_{AW} &= -(\nabla_{BX} \nabla_{AW} - \nabla_{AW} \nabla_{BX}) \\ &= -(\epsilon_{BA} \nabla_{NX} \nabla^N{}_W + \epsilon_{XW} \nabla_{BN} \nabla_A^N) \\ \nabla_{AW} \nabla_{BX} - \nabla_{BX} \nabla_{AW} &= \epsilon_{AB} \nabla_{NX} \nabla^N{}_W + \epsilon_{WX} \nabla_{BN} \nabla_A^N, \end{aligned} \quad (\text{A.84})$$

de posse das eqs.(A.83, A.84), pode-se ainda escrever que

$$\begin{aligned}\nabla_{AW}\nabla_{BX} - \nabla_{BX}\nabla_{AW} &= \epsilon_{AB}\frac{1}{2}(\nabla_{NW}\nabla^N{}_X - \nabla_{NX}\nabla^N{}_W) \\ &+ \epsilon_{WX}\frac{1}{2}(\nabla_{AN}\nabla^N{}_B - \nabla_{BN}\nabla^N{}_A)\end{aligned}\quad (\text{A.85})$$

e que

$$\nabla_{AN}\nabla^N{}_B = -\nabla_A{}^N\nabla_{BN} \quad (\text{A.86})$$

com isso a eq.(A.85) ficará:

$$\begin{aligned}\nabla_{AW}\nabla_{BX} - \nabla_{BX}\nabla_{AW} &= \epsilon_{AB}\frac{1}{2}(\nabla_{NW}\nabla^N{}_X - \nabla^N{}_X\nabla_{NW}) \\ &+ \epsilon_{WX}\frac{1}{2}(\nabla_{AN}\nabla^N{}_B - \nabla^N{}_B\nabla_{AN}) \\ \nabla_{AW}\nabla_{BX} - \nabla_{BX}\nabla_{AW} &= \epsilon_{AB}\nabla_{N(W}\nabla^N{}_X) + \epsilon_{WX}\nabla_{N(A}\nabla^N{}_B),\end{aligned}\quad (\text{A.87})$$

a qual pode-se escrever da seguinte forma

$$\nabla_{AW}\nabla_{BX} - \nabla_{BX}\nabla_{AW} = \epsilon_{AB}\nabla_{N(W}\nabla^N{}_X) - \epsilon_{WX}\nabla_{(A}{}^N\nabla_{B)N} \quad (\text{A.88})$$

onde pode-se dizer que

$$\nabla_{(A}{}^N\nabla_{B)N} = -\frac{1}{2}\epsilon^{WX}(\nabla_{AW}\nabla_{BX} - \nabla_{BX}\nabla_{AW}) \quad (\text{A.89a})$$

$$\nabla_{N(W}\nabla^N{}_X) = \frac{1}{2}\epsilon^{AB}(\nabla_{AW}\nabla_{BX} - \nabla_{BX}\nabla_{AW}). \quad (\text{A.89b})$$

Aplicando o espinor  $\mathcal{X}_{CKDZ}$  nas identidades de Ricci, teremos:

$$\begin{aligned}(\nabla_{AX}\nabla_{BY} - \nabla_{BY}\nabla_{AX})\mathcal{X}_{CKDZ} &= R^{EQ}{}_{CKBXAW}\mathcal{X}_{EQDZ} \\ &+ R^{EQ}{}_{DZBXAW}\mathcal{X}_{CKEQ},\end{aligned}\quad (\text{A.90})$$

onde

$$\mathcal{X}_{CKDZ} = \varphi_C\varphi_D\epsilon_{KZ} = \mathcal{X}_{(CD)(KZ)}. \quad (\text{A.91})$$

Substituindo as eqs.(A.89a) e (A.89b) na eq.(A.90), obtém-se

$$\begin{aligned}-2\nabla_{(A}{}^N\nabla_{B)N}\mathcal{X}_{CKDZ} &= \epsilon^{WX}R^{EQ}{}_{CKBXAW}\mathcal{X}_{EQDZ} \\ &+ \epsilon^{WX}R^{EQ}{}_{DZBXAW}\mathcal{X}_{CKEQ}\end{aligned}\quad (\text{A.92})$$

ou

$$\begin{aligned}2\nabla_{N(W}\nabla^N{}_X)\mathcal{X}_{CKDZ} &= \epsilon^{AB}R^{EQ}{}_{CKBXAW}\mathcal{X}_{EQDZ} \\ &+ \epsilon^{AB}R^{EQ}{}_{DZBXAW}\mathcal{X}_{CKEQ}.\end{aligned}\quad (\text{A.93})$$

Usando a definição feita na eq.(A.91) pode-se escrever que

$$\nabla_{(A^N \nabla_B)N} \mathcal{X}_{CKDZ} = \nabla_{(A^N \nabla_B)N} \varphi_C \varphi_D \epsilon_{KZ} = \epsilon_{KZ} \nabla_{(A^N \nabla_B)N} \varphi_C \varphi_D, \quad (\text{A.94})$$

desta equação, tem-se

$$\begin{aligned} 2\nabla_{(A^N \nabla_B)N} \varphi_C \varphi_D &= (\nabla_A^N \nabla_{BN} + \nabla_B^N \nabla_{AN}) \varphi_C \varphi_D \\ &= \nabla_A^N (\varphi_C \nabla_{BN} \varphi_D + \varphi_D \nabla_{BN} \varphi_C) \\ &\quad + \nabla_B^N (\varphi_C \nabla_{AN} \varphi_D + \varphi_D \nabla_{AN} \varphi_C) \\ &= (\nabla_A^N \varphi_C) (\nabla_{BN} \varphi_D) + \varphi_C \nabla_A^N \nabla_{BN} \varphi_D \\ &\quad + (\nabla_A^N \varphi_D) (\nabla_{BN} \varphi_C) + \varphi_D \nabla_A^N \nabla_{BN} \varphi_C \\ &\quad + (\nabla_B^N \varphi_C) (\nabla_{AN} \varphi_D) + \varphi_C \nabla_B^N \nabla_{AN} \varphi_D \\ &\quad + (\nabla_B^N \varphi_D) (\nabla_{AN} \varphi_C) + \varphi_D \nabla_B^N \nabla_{AN} \varphi_C \\ &= \varphi_C (\nabla_A^N \nabla_{BN} + \nabla_B^N \nabla_{AN}) \varphi_D \\ &\quad + \varphi_D (\nabla_A^N \nabla_{BN} + \nabla_B^N \nabla_{AN}) \varphi_C \\ &= \varphi_C (\nabla_A^N \nabla_{BN} + \nabla_B^N \nabla_{AN}) \varphi_D \\ &\quad + \varphi_D (\nabla_A^N \nabla_{BN} + \nabla_B^N \nabla_{AN}) \varphi_C \\ \nabla_{(A^N \nabla_B)N} \varphi_C \varphi_D &= \varphi_C \nabla_{(A^N \nabla_B)N} \varphi_D + \varphi_D \nabla_{(A^N \nabla_B)N} \varphi_C. \end{aligned} \quad (\text{A.95})$$

Usando a eq.(A.95) na eq.(A.94), obtém-se

$$\begin{aligned} \nabla_{(A^N \nabla_B)N} \mathcal{X}_{CKDZ} &= \epsilon_{KZ} (\varphi_C \nabla_{(A^N \nabla_B)N} \varphi_D + \varphi_D \nabla_{(A^N \nabla_B)N} \varphi_C) \\ -2\epsilon^{KZ} \nabla_{(A^N \nabla_B)N} \mathcal{X}_{CKDZ} &= -4 [\varphi_C \nabla_{(A^N \nabla_B)N} \varphi_D + \varphi_D \nabla_{(A^N \nabla_B)N} \varphi_C]. \end{aligned} \quad (\text{A.96})$$

Com isso a eq.(A.92), pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} -2\epsilon^{KZ} \nabla_{(A^N \nabla_B)N} \mathcal{X}_{CKDZ} &= \epsilon^{KZ} (\epsilon^{WX} R^{EQ}{}_{CKBXAW} \varphi_E \varphi_D \epsilon_{QZ} \\ &\quad + \epsilon^{WX} R^{EQ}{}_{DZBXAW} \varphi_E \varphi_C \epsilon_{KQ}) \\ -2\epsilon^{KZ} \nabla_{(A^N \nabla_B)N} \mathcal{X}_{CKDZ} &= \epsilon^{WX} (R^{EQ}{}_{CQBXAW} \varphi_D + R^{EQ}{}_{DQBXAW} \varphi_C) \varphi_E. \end{aligned} \quad (\text{A.97})$$

Comparando a eq.(A.96) com a eq.(A.97), obtém-se

$$\begin{aligned} -4 [\varphi_C \nabla_{(A^N \nabla_B)N} \varphi_D + \varphi_D \nabla_{(A^N \nabla_B)N} \varphi_C] &= \\ \epsilon^{WX} (R^{EQ}{}_{CQBXAW} \varphi_D + R^{EQ}{}_{DQBXAW} \varphi_C) \varphi_E, & \quad (\text{A.98}) \end{aligned}$$

contraindo a equação acima com  $(\eta^C \eta^D)$ , obtém-se

$$-4 \left[ \varphi_C \nabla_{(A}{}^N \nabla_{B)N} \varphi_D + \varphi_D \nabla_{(A}{}^N \nabla_{B)N} \varphi_C \right] \eta^C \eta^D = \epsilon^{WX} \left( R^{EQ}{}_{CQBXAW} \varphi_D + R^{EQ}{}_{DQBXAW} \varphi_C \right) \varphi_E \eta^C \eta^D, \quad (\text{A.99})$$

abrindo a equação, chega-se a seguinte conclusão:

$$-4\eta^D \nabla_{(A}{}^N \nabla_{B)N} \varphi_D - 4\eta^C \nabla_{(A}{}^N \nabla_{B)N} \varphi_C = \epsilon^{WX} \left( R^{EQ}{}_{CQBXAW} \eta^C + R^{EQ}{}_{DQBXAW} \eta^D \right) \varphi_E, \quad (\text{A.100})$$

desta equação pode-se facilmente ver que

$$-4\nabla_{(A}{}^N \nabla_{B)N} \varphi_D = \epsilon^{WX} R^{EQ}{}_{DQBXAW} \varphi_E \quad (\text{A.101a})$$

$$-4\nabla_{(A}{}^N \nabla_{B)N} \varphi_C = \epsilon^{WX} R^{EQ}{}_{CQBXAW} \varphi_E \quad (\text{A.101b})$$

tem-se que

$$\begin{aligned} R^{EQ}{}_{CQBXAW} \varphi_E &= \epsilon^{KQ} R_{EK CQBXAW} \varphi^E \\ &= \epsilon^{KQ} \left( \epsilon_{KQ} R_{ECBXAW} + \epsilon_{EC} R_{KQBXAW} \right) \varphi^E \\ R^{EQ}{}_{CQBXAW} \varphi_E &= \epsilon^{KQ} \epsilon_{KQ} R_{ECBXAW} \varphi^E = 2R_{ECBXAW} \varphi^E \end{aligned} \quad (\text{A.102})$$

Utilizando a equação acima e aplicando a eq.(A.43), obtém-se

$$\begin{aligned} \epsilon^{WX} R^{EQ}{}_{CQBXAW} \varphi_E &= 2\epsilon^{WX} \left( \epsilon_{BA} Q_{ECXW} + \epsilon_{XW} Q_{ECBA} \right) \varphi^E \\ &= -2\epsilon^{WX} \epsilon_{WX} Q_{ECBA} \varphi^E \\ \epsilon^{WX} R^{EQ}{}_{CQBXAW} \varphi_E &= -4Q_{ECBA} \varphi^E, \end{aligned} \quad (\text{A.103})$$

onde já se sabe que o  $Q_{ECBA}$  é simétrico nos pares e na troca dos pares, conforme mostra a eq.(A.41). Com isso substituindo a eq.(A.103) na eq.(A.101b), obtém-se

$$\begin{aligned} \nabla_{(A}{}^N \nabla_{B)N} \varphi_C &= Q_{NCBA} \varphi^N \\ &= Q_{(NCBA)} \varphi^N - \frac{1}{3} g_{NCBA} \varphi^N \Lambda \\ &= Q_{(CBAN)} \varphi^N - \frac{1}{3} \left[ -\frac{1}{2} (\epsilon_{NB} \epsilon_{CA} + \epsilon_{NA} \epsilon_{CB}) \varphi^N \Lambda \right] \\ &= Q_{(CBAD)} \varphi^D + \frac{1}{6} (\epsilon_{NB} \varphi^N \epsilon_{CA} + \epsilon_{NA} \varphi^N \epsilon_{CB}) \Lambda \\ \nabla_{(A}{}^N \nabla_{B)N} \varphi_C &= Q_{(ABCD)} \varphi^D + \frac{1}{6} (\epsilon_{CA} \varphi_B + \epsilon_{CB} \varphi_A) \Lambda, \end{aligned} \quad (\text{A.104})$$

como já se sabe,  $\Lambda$  é o escalar de curvatura. De posse disso e da eq.(A.54) chega-se forma irreduzível das identidades de Ricci no formalismo de espinores, que é dada por

$$\nabla_{(A}{}^N \nabla_{B)N} \varphi_C = \Phi_{ABCD} \varphi^D + \frac{1}{6} (\epsilon_{CA} \varphi_B + \epsilon_{CB} \varphi_A) \Lambda. \quad (\text{A.105})$$

Serão analisadas agora as identidades de Bianchi no formalismo dos espinores. Temos do formalismo de tensores que  $\nabla^a G_{ab} = 0$ . O espinor de Einstein é dado por

$$\begin{aligned} G_{ABCD} &= R_{ABCD} - \frac{1}{2} g_{ABCD} R, \\ G_{ABCD} &= S_{ABCD} - \frac{1}{6} g_{ABCD} R, \end{aligned} \quad (\text{A.106})$$

onde  $R_{ABCD}$  é o espinor de Ricci e  $S_{ABCD}$  é o espinor de Ricci sem traço, de posse dos resultados obtidos até o presente momento, pode-se sem nenhum problema escrever o espinor de Einstein como sendo

$$G_{ABCD} = 2\Phi_{ABCD} - \frac{1}{6} g_{ABCD} R, \quad (\text{A.107})$$

com isso pode-se escrever as identidades de Bianchi contraída da seguinte forma

$$\begin{aligned} \nabla^{AB} G_{ABCD} &= 2\nabla^{AB} \Phi_{ABCD} - \frac{1}{6} g_{ABCD} \nabla^{AB} R \\ &= 2\nabla^{AB} \Phi_{ABCD} - \frac{1}{6} \left[ -\frac{1}{2} (\epsilon_{AC} \epsilon_{BD} + \epsilon_{AD} \epsilon_{BC}) \right] \nabla^{AB} R \\ &= 2\nabla^{AB} \Phi_{ABCD} + \frac{1}{12} (\nabla_{CD} + \nabla_{DC}) R \\ \nabla^{AB} G_{ABCD} &= 2\nabla^{AB} \Phi_{ABCD} + \frac{1}{6} \nabla_{CD} R = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.108})$$

Da última equação acima, obtém-se as identidades de Bianchi no formalismo dos espinores, que é dada por

$$\nabla^{AB} \Phi_{ABCD} + \frac{1}{12} \nabla_{CD} R = 0. \quad (\text{A.109})$$